# Exercices de colle en PCSI 2

10 février 2020

## 1 Semaine du 23 septembre 2019 / du 4 octobre 2019

### 1.1 Nombres complexes

**Exercice 1.** Calculer les racines carrées de $z = 8 - 6i$. [Analyse-synthèse brute.]

**Exercice 2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$ [$z' = (z-1)^3$...]
3. $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ où $\theta$ réel
4. $z^2 - (6+i)z + (11+13i) = 0$ [Début d'un carré...]

**Exercice 3.** Déterminer les complexes $z$ non nuls tels que

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|.$$

[Remarquer qu'alors $|z| = 1$. Faire un dessin et chercher l'argument de $z$ avec $|e^{i\theta} - 1| = 1$.]

**Exercice 4.** Calculer $(1-i\sqrt{3})^7$. [Trouver une forme exponentielle pour $1-i\sqrt{3}$.]

**Exercice 5.** Calculer

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{4})}$$

et en déduire $\tan(\frac{\pi}{24})$.

**Exercice 6.** Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et en déduire la valeur de $\sin(\pi/5)$.

**Exercice 7.** [Plus long et plus dur.]

1. Calculer les racines $n$-ièmes de $-i$ et $1+i$. [Passer par la forme exponentielle par exemple.]
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les solutions complexes l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

### 1.2 Équations différentielles linéaires

**Exercice 8.** Résoudre $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$. [Utiliser linéarité !]

**Exercice 9.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$.

**Exercice 10.** Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + 2iy = 0$ valant 1 en 0 et de limite nulle en $+\infty$.

**Exercice 11.** Résoudre

1. $x'' + \omega_0^2 x = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{k/m} > 0$ avec $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = v_0$
2. $x'' + \omega_0^2 x = A$ où $\omega_0 = \sqrt{k/m} > 0$ avec $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = v_0$

**Exercice 12.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\mathrm{ch}(t)$.

**Exercice 13.** Résoudre les équations différentielles suivantes [Bibmath]

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
2. $y' + y = xe^{-x}$

**Exercice 14.** Résoudre

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$
2. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x + e^{3x}$

## 2 Semaine du 7 octobre / du 14 octobre 2019

**Exercice 15.** Soient $E, F$ deux ensembles et $f : E \to F$. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer l'équivalence

$$f(A) \cap B = \varnothing \Longleftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing.$$

**Exercice 16.** Montrer

$$f \text{ injective } \Longleftrightarrow \forall\, A, B \subset X\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

et dans ce cas vérifier que $f$ induit une bijection sur son image.

**Exercice 17.** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux aplications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que $f$ et $g$ sont toutes les deux bijectives.

Soient $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, et $g : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

On note $f : z \in \mathbb{H} \to g(z) \in \mathbb{D}$.

1. $g$ et $f$ sont-elles bien définies ?
2. $g$ et $f$ sont-elles des bijections ?

**Exercice 18.** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $f$ est bien définie et bijective.

**Exercice 19.** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n = |E|$. Soit $A$ une partie de $E$, de cardinal $p$.

1. Quel est le nombre de parties à $k$ éléments de $E$ contenant exactement un élément de $A$ ?
2. Quel est le nombre de parties à $k$ éléments de $E$ contenant au moins un élément de $A$ ?

**Exercice 20.** Le but de cet exercice est de dénombrer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

1. Remarquer qu'une telle application est injective.
2. En déduire une condition sur $n$ et $p$ pour que l'ensemble que l'on dénombre ne soit pas vide.
3. ..

**Exercice 21.** Soit $E$ un ensemble fini. Montrer que

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}.$$

Indication : faire le changement de variable $Y = X^c$ ou bien diviser la somme selon le nombre d'élements de $X$.

**Exercice 22.** Calculer

$$\sum_{X,Y \in \mathcal{P}(E)} |X \cap Y|$$

et

$$\sum_{X,Y \in \mathcal{P}(E)} |X \cup Y|.$$

*Indication : procéder en séparant la somme selon le cardinal de l'intersection. Utiliser l'exercice précédent éventuellement pour la seconde question.*

*Normalement cela donne :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sum_{|X\cap Y|=k} |X\cap Y| &= \sum_{k=0}^{n} k \sum_{|X\cap Y|=k} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \times \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \times \sum_{\ell=0}^{n-k-j} \binom{n-k-j}{\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \times \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \times 2^{n-k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \times 3^{n-k} \\
&= n \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} \times 3^{n-1-k'} \\
&= n4^{n-1}
\end{aligned}$$

**Exercice 23.** [Formule du crible.] Soit $E_1, ..., E_n$ une famille d'ensemble finis.

1. Montrer que $|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|$.
2. Montrer que $|E_1 \cup E_2 \cup E_3| = |E_1| + |E_2| + |E_3| - |E_1 \cap E_2| - |E_1 \cap E_3| - |E_2 \cap E_3| + |E_1 \cap E_2 \cap E_3|$.
3. Montrer par récurrence que

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n} E_k \right| = \sum_{k=1}^{n} \left( (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n]\!], |I|=k} | \cap_{i\in I} E_i| \right).$$

## 3 Semaine du 5 novembre / 12 novembre

Fonctions usuelles

**Exercice 24.**

1. Donner le domaine de définition et l'allure de la fonction arctan.
2. Simplifier

$$\arctan a + \arctan b - \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$

pour $ab \neq 1$. [Utiliser dérivation en fixant un terme, ou la formule $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ pour $x, y \neq \pi/2 \bmod \pi$.].

3. Que dire si $ab = 1$ ?

**Exercice 25.** Soit $\lambda$ un réel. Déterminer le minimum de la fonction $f_\lambda$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \ln x.$$

**Exercice 26.** Montrer l'inégalité

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Faire un dessin l'illustrant.

**Exercice 27.** Résoudre

1. $2\ln(2x-1) - \ln(5-2x) - \ln 2 \leq 0$
2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$.

**Exercice 28.** Déterminer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sin x \times \sin \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x\to+0} \frac{e^x-1}{\ln(1+x)}$
4. $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{\sin(x-2)}$ *(introduire $x-2$ et comparer)*
5. $\lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2+x^3}{e^x+1}$

**Exercice 29.** Résoudre les équations

1. $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

**Exercice 30.**

1. Comparer $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$ et $\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x$.
2. Soit $a > 1$. Comparer au voisiange de $+\infty$ le comportement de $a^{(a^x)}$ avec celui de $x^{(x^a)}$.

**Exercice 31.** Simplifier $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. *Indication : reconnaitre une identité trigo... (Dériver ou poser $x = \tan\theta$ pour $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$.)*

**Exercice 32.** [Le logarithme n'est pas un polynôme.]

1. Soit $f$ un polynôme de degré $n$, $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Démontrer que $x^{-n} f(x)$ admet une limite non nulle en $+\infty$.
2. On suppose qu'il existe deux polynômes $P$ et $Q$ tels que, pour tout $x > 0$

$$\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

   On note $p$ le degré de $P$ et $q$ celui de $Q$ (par définition le $n$de $f$ dans la question précédente). Démontrer que $x^{q-p} \ln x$ admet une limite non-nulle en $+\infty$.
3. En déduire une contradiction d'après le cours.

*Plus d'exercices : cf fic00082.pdf.*

**Exercice 33.** Limite quand $x \to 0^+$ de $x^{\frac{1}{x}}$.

**Exercice 34.** Limite quand $x \to \infty$ de $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

**Exercice 35.**

1. Calculer $\mathrm{sh}(2x)$ en fonction de $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Simplifier
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}(2^{-k}x)$$
pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire l'éventuelle limite de $(u_n)$.

## 4 Semaines du 18 novembre & 25 novembre 2019

Espaces vectoriels

**Exercice 36.** Montrer que l'ensemble des applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(n) + f(m)$$

est un espace vectoriel réel.

**Exercice 37.** Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-e.v ?

1. $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ bornée }\}$
2. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ monotone }\}$
3. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$
4. Ensemble des suites réelles convergentes.
5. Ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent la valeur $\beta$ en $\alpha$.

**Exercice 38.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v, et soient $F$ et $G$ deux s.e.v de $E$.

1. Montrer que $F \cup G$ est un s.e.v de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. Indication : pour le sens direct, raisonner par l'absurde, se donner $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$ et étudier le cas de $x + y$.
2. Plus généralement, si $n$ est un entier supérieur ou égal à 2, montrez que $E$ ne peut être la réunion de $n$ sous-espaces vectoriels strictement inclus dans $E$.

**Exercice 39.** Écrire les espaces suivants sous la forme d'un $Vect$.

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 3y = 2x+2t\}$ [Par exemple $(1, 1/3, 0, -1/2), (0, 0, 1, 0)$.]
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 2x + z\}$ [Par exemple $(1, 1/2, 0), (0, 1/2, 1)$.]

**Exercice 40.** Dans les exemples suivants, montrer que les s.e.v $F$ et $G$ de $E$ sont égaux.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1,1,3),(1,-1,-1))$, $G = \text{Vect}((1,0,1),(2,-1,0))$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$, $G = \text{Vect}((3,7,0),(5,0,-7))$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, $G = \text{Vect}((1,1,-2),(1,-4,3))$.
4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+2z-2t=0\}$, $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x+y+7z-t=0 \text{ et } x-3y+3z-5t=0\}$.

**Exercice 41.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$. Déterminer son noyau et son image. Est-elle injective, surjective ?

**Exercice 42.** Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi : E \to E, f \mapsto f'$. Cette application est-elle linéaire ? Est-elle injective ? Surjective ? / Déterminer son noyau, son image.

**Exercice 43.** Soit $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,0,0)$ et $v = (1,1,1)$. Trouver un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est $E$.

**Exercice 44.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences :

$$f^2 = 0 \iff \text{Im} f \subset \ker f \qquad ; \qquad \ker f^2 \subset \ker f \iff \text{Im} f \cap \ker f = \{0\}.$$

**Exercice 45.** Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f(\ker g \circ f) = \ker g \cap \text{Im} f.$$

**Exercice 46.** Soient $E$, $F$ et $G$ trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $A$.

1. Est-il vrai que $E \cap (F+G) = (E \cap F) + (E \cap G)$ ?
2. Est-il vrai que $E \cap (F + (E \cap G)) = (E \cap F) + (E \cap G)$ ?

**Exercice 47.** Soit $I$ un intervalle non réduit à un point et $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1 < ... < \lambda_n$ des nombres réels. Montrer que la famille de fonctions $(t \mapsto e^{\lambda_i t})_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans $E$. *Indication : on pourra dériver.*

**Exercice 48.** Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $p^2 = p$. Déterminer une base (famille génératrice) de $\ker p$ et une base (famille génératrice) de $\text{Im} p$.
2. Déterminer une base telle que la matrice de $p$ dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 49.** Calculer $A^n$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 50.** Soit

$$f : x \in ]1, +\infty[ \mapsto \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2} \in \mathbb{R}$$

1. Montrer qu'il existe trois réels $a, b, c$ tels que

$$\forall\, x \in ]1, +\infty[ \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

2. (Potentiellement non traité) Trouver la primitive de $f$ qui s'annule en 2 .

**Exercice 51.** Résoudre selon le paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 3x + y - z & = 1 \\ x - 2y + 2z & = m \\ x + y - z & = 1 \end{cases}$$

Interprétation géométrique ?

**Exercice 52.** Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + my & = & -3 \\ mx + 4y & = & 6 \end{array} \right.$$

selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ et donner une interprétation géométrique.

**Exercice 53.** Suivant la valeur du paramètre $\alpha$, résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha x + y + z + t & = & 1 \\ x + \alpha y + z + t & = & 1 \\ x + y + \alpha z + t & = & 1 \\ x + y + z + \alpha t & = & 1 \end{array} \right.$$

**Exercice 54.** Suivant la valeur du paramètre $m$, résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array} \right.$$

[Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 2$, compatible ssi $m \neq 2$.]

**Exercice 55.** Suivant la valeur du paramètre $m$, résoudre

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1 \end{array}\right.$$

[Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 1, \pm i$, compatible ssi $m \neq 0, \pm i$.]

**Exercice 56.** Soient $a, b, c, x', y', z'$ six réels.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = \left(\begin{array}{ccccc} x & + & y & + & z \\ ax & + & by & + & cz \\ a(a-1)x & + & b(b-1) & + & c(c-1)z \end{array}\right).$$

   Déterminer les valeurs de $a, b, c$ pour lesquelles l'application $f$ est bijective.

2. Déterminer le nombre de solutions du sytème

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & x' \\ ax & + & by & + & cz & = & y' \\ a(a-1)x & + & b(b-1) & + & c(c-1)z & = & z' \end{array}\right.$$

3. Déterminer l'image de $\mathbb{R}^3$ par $f$.

[Système de Cramer ssi $a, b, c$ sont distincts. Sinon, il y a des solutions quels que soit $d \in \{a, b, c\}$.

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - (a(a-1))L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + (1-(a+b)L_2$ et on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (b-a)y & + & (c-a)z & = & 0 \\ & & & & (c-a)(c-b)z & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui permet de conclure.]

**Exercice 57.** Soit $E$ un espace vectoriel, soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et on suppose que $f, g$ commutent et

$$\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \ker(g) \oplus \operatorname{Im}(g) = E$$

Montrer que $\ker(f \circ g) \oplus \operatorname{Im}(f \circ g) = E$.

**Exercice 58.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\ker u \cap \operatorname{Im} u = \{0\} \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u$$

et

$$E = \ker u + \operatorname{Im} u \Leftrightarrow \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u.$$

*Compléter avec des exercices de sommes et projecteurs.*

## 5 Semaines du 2 décembre & du 9 décembre 2019

**Exercice 59.** Soit

$$f : x \in ]1, +\infty[ \mapsto \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2} \in \mathbb{R}$$

1. Montrer qu'il existe trois réels $a, b, c$ tels que

$$\forall\, x \in ]1, +\infty[ \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

2. (Potentiellement non traité) Trouver la primitive de $f$ qui s'annule en 2 .

**Exercice 60.** Résoudre selon le paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 3x + y - z & = 1 \\ x - 2y + 2z & = m \\ x + y - z & = 1 \end{cases}$$

Interprétation géométrique ?

**Exercice 61.** Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + my & = & -3 \\ mx + 4y & = & 6 \end{array} \right.$$

selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ et donner une interprétation géométrique.

**Exercice 62.** Suivant la valeur du paramètre $\alpha$, résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha x + y + z + t & = & 1 \\ x + \alpha y + z + t & = & 1 \\ x + y + \alpha z + t & = & 1 \\ x + y + z + \alpha t & = & 1 \end{array} \right.$$

**Exercice 63.** Suivant la valeur du paramètre $m$, résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array} \right.$$

[Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 2$, compatible ssi $m \neq 2$.]

**Exercice 64.** Suivant la valeur du paramètre $m$, résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2 z & = & m \\ mx & - & m^2 y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3 z & = & -1 \end{array} \right.$$

[Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 1, \pm i$, compatible ssi $m \neq 0, \pm i$.]

**Exercice 65.** Soient $a, b, c, x', y', z'$ six réels.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & + & y & + & z \\ ax & + & by & + & cz \\ a(a-1)x & + & b(b-1) & + & c(c-1)z \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les valeurs de $a, b, c$ pour lesquelles l'application $f$ est bijective.

2. Déterminer le nombre de solutions du sytème

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & x' \\ ax & + & by & + & cz & = & y' \\ a(a-1)x & + & b(b-1) & + & c(c-1)z & = & z' \end{cases}$$

3. Déterminer l'image de $\mathbb{R}^3$ par $f$.

[Système de Cramer ssi $a, b, c$ sont distincts. Sinon, il y a des solutions quels que soit $d \in \{a, b, c\}$.

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - (a(a-1))L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + (1-(a+b)L_2$ et on obtient le système

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (b-a)y & + & (c-a)z & = & 0 \\ & & & & (c-a)(c-b)z & = & 0 \end{cases}$$

ce qui permet de conclure.]

**Exercice 66.** Étudier les limites suivantes

1. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ en 1
2. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
3. $\frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $+\infty$
4. $\sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$
5. $x^5 e^{-x^2}$ en $+\infty$
6. $\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $+\infty$
7. $\frac{x \ln x + 7}{x^2+4}$ en $+\infty$
8. $\frac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x}$ en $+\infty$

**Exercice 67.** Calcul d'équivalents. Cf feuille de TD HX1 2013.

**Exercice 68.** Déterminer lorsqu'elles existent les limites suivantes en utilisant éventuellement des équivalents

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-5x+1}{(3x-1)^4}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}}$

**Exercice 69.**

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{x_0}(f-g) = 0 \Longleftrightarrow e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \quad x \to x_0$$
2. Dans chacun des cas suivants, montrer que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Que peut-on dire de $e^{f(x)}$ et $e^{g(x)}$ ?
   (a) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$
   (b) $f(x) = x+1$ et $g(x) = x+2$
   (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$
3. Peut-on composer les équivalent ? ($f \sim g$ implique-t-il $h \circ f \sim h \circ g$ ?

**Exercice 70.** Développement asymptotique (trois premiers termes) de $x \mapsto \frac{e^x\sqrt{x}}{e^x+\ln(x)}$ en $+\infty$.

$$\frac{e^x\sqrt{x}}{e^x+\ln(x)} = 1 + \sqrt{x}e^{-x} - \ln(x)e^{-x} + o(\ln(x)e^{-x})$$

(nécessite croissance comparée).

**Exercice 71.** $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(1/x)}{e^{1/x}-1}$ existe ?

**Exercice 72.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)+\tan(5x^2)}{\sin(7x)(\tan(2x)+\sin(4x))}$

**Exercice 73.** Donner un développement limité à l'ordre $n$ indiqué en $x = 0$ des fonctions suivantes

1. $\tan x \qquad (n = 5) \qquad$ (rép. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$)
2. $e^x \ln(1+x) \qquad (n = 4) \qquad$ (rép. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$)
3. $\ln(1-\sin x) \qquad (n = 4) \qquad$ (rép. $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$)
4. $\arctan(e^x) \qquad (n = 3) \qquad$ (rép. $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$)

**Exercice 74.** Donner un développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 1$ de $(\ln x)/x^2$.

**Exercice 75.** Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, calculer
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

**Exercice 76.** Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, calculer
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+3h) - 3f(a+h) + 3f(a-h) - f(a-3h)}{h^3}$$

**Exercice 77** (Nécessite théorème d'inversion locale)**.** Soit $f$ l'application définie par $f(x) = xe^{x^2}$ pour tout $x$ réel.

1. Justifier l'**existence** de réels $a_0$, $a_1$ et $a_2$ tels que $f^{-1}(y) = a_0 y + a_1 y^3 + a_2 y^5 + o(y^5)$ au voisinage de $y = 0$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de $f^{-1}$ en 0.

**Exercice 78.**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution que l'on notera $x_n$.
2. Montrer que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de $(x_n)$.
3. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
4. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. *Réinjecter $x_n = \frac{1}{n} + \varepsilon_n$ où $n\varepsilon_n \to 0$. Tout multiplier par $n^3$, faire apparaître $n\varepsilon_n$ quasiment partout et conclure $n^4\varepsilon_n \to -1$.*

# 6 Semaines du 16 décembre 2019 & 06 janvier 2020

**Exercice 79** (Un très facile.)**.** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A$ est inversible et calculer son inverse.
2. Retrouver ce résultat en montrant que $A^2 - 4A + I_2 = 0$.

**Exercice 80.** Déterminer, suivant la valeur du réel $a$, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

*(L2−aL1)→L2, (L3−a2L1)→L3, (L4−a3L1)→L4*

**Exercice 81.** Calculer la puissance $n$-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Deviner puis prouver par récurrence*

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

**Exercice 82.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse. *Indication : penser aux sommes géométriques.*

**Exercice 83.** Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto XP'' - 2P' + P$. *On intruduit ici $\mathbb{R}_2[X]$ comme l'ensemble des fonctions polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}$. On admet qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-ev.*

1. Quelle est la matrice de $A$ de $u$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ ?
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $A$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 4\gamma \\ \beta + 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$
*c'est-à-dire*
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
*(Vérifié sur Wolframalpha). Ainsi on est capable de résoudre, étant donné $Q$ un polynôme de degré deux, l'équation $Q = XP'' - 2P' + P$.*
3. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $A^k$. *Indication : écrire $A = I_3 + N$ où $N^3 = 0$.*

**Exercice 84** (Déterminant 1)**.** Calculer
$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 85** (Déterminant 2)**.** Calculer
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 86** (Déterminant 3)**.** Calculer
$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2b & c-a-b \end{vmatrix}.$$

**Exercice 87** (Déterminant 4)**.** Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = \min(i, j)$.

**Exercice 88.** Déterminant de $A_{ij} = |i - j| + 1$

## 7 Semaines du 13 & 27 janvier 2020

*Espaces vectoriels de dimension finie.*

**Exercice 89.** Les systèmes suivants forment-ils des bases de ℝ3 ? S1={(1,−1,0),(2,−1,2)} ; S2={(1,−1,0),(2,−1,2),(1,0,a)} avec a réel (on discutera suivant la valeur de a ) ; S3={(1,0,0),(a,b,0),(c,d,e)} avec a,b,c,d,e réels (on discutera suivant leur valeur) ; S4={(1,1,3),(3,4,5),(−2,5,7),(8,−1,9)}.

**Exercice 90.** Pour E=ℝ4 , dire si les familles de vecteurs suivantes peuvent être complétées en une base de E . Si oui, le faire. (u,v,w) avec u=(1,2,−1,0) , v=(0,1,−4,1) et w=(2,5,−6,1) ; (u,v,w) avec u=(1,0,2,3) , v=(0,1,2,3) et w=(1,2,0,3) ; (u,v) avec u=(1,−1,1,−1) et v=(1,1,1,1) .

**Exercice 91.** Soient F et G les sous-espaces vectoriels de ℝ3 définis par : FG=={(x,y,z)∈ℝ3 ; x−2y+z=0}{(x,y,z)∈ℝ3 ; 2x−y+2z=0}. Donner une base de F , une base de G , en déduire leur dimension respective. Donner une base de F⋂G , et donner sa dimension. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F trouvée en 1 et des vecteurs de la base de G trouvée en 2. est une famille génératrice de ℝ3 . Est-elle libre ? Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 92.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'un endormorphisme qui commute avec tous les automorphismes est une homothétie. Peut-on généraliser à $E$ de dimension infinie ?

**Exercice 93** (Factorisation)**.**

**Exercice 94.** Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ qui sont affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Démontrer que $E$ est un espace vectoriel et en donner une base.

**Exercice 95.** Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

**Exercice 96.** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit $u$ l'application de $E$ dans lui-même par $u(P) = P + (1 - X)P\prime$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de Im(u) .
3. Déterminer une base de ker(u) .
4. Montrer que ker(u) et Im(u) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

**Exercice 97.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que, pour tout $x \in E$ , il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier $n$ tel que $f^n = 0$ . *Introduire une base de E.*

**Exercice 98.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sevs de E . Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième : F$\bigcap$G=$\{0\}$ ; F+G=E ; dim(F)+dim(G)=dim(E) .

*Tout repose sur la formule de Grassmann.*

**Exercice 99.** Soient $f_2, f_2$ les deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définis par $f_1(x, y) = x+y$ et $f_2(x, y) = x-y$. Montrer que $(f_1, f_2)$ forme une base de $(\mathbb{R}^2)^*$. Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base $(f_1, f_2)$ : $g(x, y) = x$, $h(x, y) = 2x-6y$.

# 8 Semaines du 3 & 10 février 2020

**Exercice 100.** Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists\, \phi \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G}),\ g = \phi \circ f \ \Leftrightarrow \ker f \subset \ker g \tag{1}$$

**Exercice 101.** Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists\, \phi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}),\ f = g \circ \phi \Leftrightarrow \mathrm{Img} f \subset \mathrm{Img} g \tag{2}$$

**Exercice 102.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer

$$\dim \ker g \circ f \leq \dim \ker f + \dim \ker g$$

*Solution.*

$$\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg} f$$

$$\dim E = \dim \ker g \circ f + \mathrm{rg} g \circ f$$

*De plus,*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg} f &= \dim \ker g_{|\mathrm{Img} f} + \mathrm{rg} g_{|\mathrm{Img} f} \\ &= \dim \ker g_{|\mathrm{Img} f} + \mathrm{rg} g \circ f \end{aligned}$$

*d'où*

$$\dim \ker g \circ f = \dim \ker f + \dim \ker g_{|\mathrm{Img} f} \leq \dim \ker f + \dim \ker g$$

**Exercice 103.** Déterminer la dimension de $S_n(K)$ et de $A_n(K)$, espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques respectivement, après avoir vérifié qu'il s'agit bien de s.e.v.

**Exercice 104.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = \ker u$ ssi $n$ est pair.
2. Montrer que dans ce cas, pour un tel $u$, il existe une base de $E$ de la forme :
$$(e_1, ..., e_p, u(e_1), ..., u(e_p)).$$

**Exercice 105.** Soit $u$ un endomorphisme de rang 1 (d'un espace de dimension finie). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$. *Passer par les matrices. Remarquer qu'une matrice de rang 1 est de la forme ${}^t xy$ ou que toutes ses colonnes sont proportionnelles entre elles...*

**Exercice 106.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(f)$ lorsque $f + g \in GL(E)$ et $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

**Exercice 107.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel *(de dimension finie)* et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in K, f(x) = \lambda_x \cdot x.$$

Montrer que $f$ est une homothétie. *Regarder $f(x+y)$ et voir ce que cela donne sur une base de $E$.*

**Exercice 108.**

**Exercice 109.**

**Exercice 110.**

**Exercice 111.**

**Exercice 112.**

**Exercice 113.**

**Exercice 114.**

**Exercice 115.**

**Exercice 116.**

**Exercice 117.**

**Exercice 118.**