Questions de cours en PCSI 2

15 mars 2020

1 Semaines du 23 septembre & du 31 septembre 2019

1.1 Nombres complexes

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire les deux formules
$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}\, |z+z'| \leq |z| + |z'|$$
$$\forall\, z, z' \in \mathbb{R}\, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$
Cas d'égalité ?
2. Énoncer et démontrer les formules d'Euler
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$
pour tout réel θ. [Simple inversion d'un système...]
3. Énoncer et démontrer la formule de Moivre
$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$
pour tout entier naturel n et réel θ. [Récurrence attendue.]
4. Énoncer et prouver les propriétés d'addition et de passage à l'inverse de l'exponentielle complexe. [J'attends une bonne définition de l'exp, avec les bons ensembles de départ et d'arrivée, et ensuite ça doit rouler. L'inverse c'est l'addition appliquée à z et $-z$.]

2 Semaines du 7 octobre & du 14 octobre 2019

1. Soit $f : X \to Y$ une application entre deux ensembles X et Y. Soient A et B des parties de X. Donner la définition quantifiée de $f(A)$ et montrer
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
puis donner un exemple simple où la dernière inclusion est stricte.

2. Même notations excepté A et B des parties de Y. Donner la définition quantifiée de $f^{-1}(A)$ et montrer

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

3. Montrer que
   (a) f et g surjectives implique $f \circ g$ surjective
   (b) $f \circ g$ injective implique g injective
   (c) $f \circ g$ surjective implique f surjective
4. Soient E et F des ensembles finis. Quel est le cardinal de l'ensemble des applications $f : E \to F$ injectives selon $|E|$ et $|F|$?
5. [...]

3 Semaines du 5 novembre & 11 novembre 2019

1. Définition et graphes de arccos *et* arcsin.
2. Définir $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto x^b$ en précisant pour quels x, a et b.
3. Rappeler la définition, le domaine de définition des fonctions sh et ch. Allure du graphe. Propriétés ? (Parité, relation fondamentale $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ démontrée).
4. Montrer

$$\forall\, x \in [-1, 1] \ \ \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

[]

4 Semaines du 18 novembre & 25 novembre 2019

1. Montrer qu'une intersetion et une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
2. Soient E et F deux s.e.v d'un e.v plus grand. Définir ce que signifie : la somme $E + F$ est directe. Montrer que $E \oplus F \Leftrightarrow E \cap F = \{0\}$.
3. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux e.v. Montrer que f est injective si et seulement si son noyau est nul.
4. Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
5. Définition et caractérisation des projecteurs et symétries, de leur image, noyau, axe ou direction.
6. Question plus délicate : le sous-espace engendré par une partie est le plus petit sous-espace contenant la partie, existence, dans la cas d'une partie finie c'est l'ensemble des combinaisons linéaires.

5 Semaines du 2 décembre & 9 décembre 2019

Systèmes linéaires Méthode du pivot de Gauss. Rang d'un système.
Développements limités Unicité, formule de Taylor Young. Développement d'une somme, d'un produit, d'une composée... DL classiques : exponentielle, fonctions trigonométriques et réciproques, logarithme, puissances de $1+x$...

1. Énoncer (et démontrer ?) la formule de Taylor-Young. En déduire le développement limité à tout ordre de $(1+x)^\alpha$ en zéro.
2. Donner le développement limité de $exp(x)$, $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en $x=0$.
3. Soient f et g des fonctions définies sur I et $a \in I$ (ou $\pm\infty$). Démontrer $f \sim g$ en a équivaut à $f = g + o(g)$ en a dans le cas où g ne s'annule pas en a.
4. Soit $AX = B$ un système. Montrer que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_h$.
5. Développement limité d'une composée.

1. [Un équivalent pour tout le monde ! Ensuite pas d'exercice d'équivalents.] Pour chacune des fonctions suivantes, donner un équivalent, le plus simple possible, au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.
   $f(x) = 5x^3 + x^2 - 7$
   $f(x) = \exp x + \sin x + \cos x - 5$ (et si je mets -2 à la place de -5 ?)
   $f(x) = e^3 + e^{2x} + e^{3x} - 3$
   $f(x) = x^2 + \ln x - 3$
   $f(x) = x^\alpha + x^\beta$

1. Montrer que
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + o(x^n) \qquad x \to 0.$$
2. Montrer que si
$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + o(h^n)$$
alors $a_k = b_k$ pour tout k.
3. Énoncer (et démontrer ?) la formule de Taylor-Young. Développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
4. Développement limité de $\exp x$, $\cos x$ et $\sin x$ en 0.

6 Semaines du 16 décembre 2019 & 6 janvier 2020

1. Soient A et B des matrices carrées inversibles. Énoncer et démontrer $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $\left({}^tB\right)^{-1} = {}^t\left(B^{-1}\right)$, et montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe non commutatif pour la multiplication matricielle.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Donner la définition et montrer que dans ce cas l'inverse est unique.
3. Montrer que pour toute application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $f(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{K}^p$.
4. Donner le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure par exemple) et le démontrer. Quand est-elle inversible ? Quelle forme a l'inverse ?
5. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est jamais inversible.
6. Montrer qu'une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, montrer que
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$
7. Montrer que $\det \lambda A = \lambda^n \det A$ pour toute matrice A et scalaire λ.

7 Semaines du 13 janvier & 27 janvier 2020

Familles libres, liées, génératrices, bases. Théorème de la dimension, théorème de la base incomplète. Sous-espaces vectoriels en dimension finie.

1. Théorème de la base incomplète
2. Théorème de la dimension
3. Théorème du rang (?)
4. Formule de la dimension de $F + G$ (Grassmann)
5. Caractérisation des supplémentaires
6. Caractérisation vectorielle de l'injectivité ou la surjectivité d'une application linéaire.

8 Semaines du 3 février & 10 février 2020

Espaces vectoriels de dimension finie Familles libres, liées, génératrices, bases. Théorème de la dimension, théorème de la base incomplète. Sous-espaces vectoriels en dimension finie. Théorème d'isomorphisme. Matrice et rang d'une famille de vecteurs. Matrice de passage. Déterminant d'une famille de vecteurs.

Applications linéaires en dimension finie Image d'une famille libre, génératrice par une application linéaire injective, surjective … Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel. Théorème du rang. Matrice et rang d'une application linéaire. Déterminant d'un endomorphisme.

1. Démontrer le théorème du rang.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F possède des supplémentaires dans E.
3. Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $f = (f_1, ..., f_n)$ une famille de n vecteurs de E. Soit $u : E \to F$ l'application linéaire tel que :$\forall i \in \{1, ..., n\}, u(e_i) = f_i$. Montrer que

   (a) u est injective si et seulement si f est libre.
   (b) u est surjective si et seulement si f est génératrice.
4. Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.

9 Semaines du 17 février & ...

Limites de fonctions Règles de calcul. limite d'une fonction positive, signe d'une fonction ayant une limite strictement positive, théorème de la limite monotone.

Comparaison de fonctions Fonctions équivalentes, négligeables devant ..., dominée par ...

Continuité Méthode de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle, d'un segment, réciproque d'une fonction continue.

Dérivation DL à l'ordre 1, règles de calcul, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis, formule de Leibniz, théorème de la limite de la dérivée.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle réel non vide. Soit $x_0 \in \overline{I}$. Si $f(x) \geq 0$ pour tout x et si $f(x)$ converge vers ℓ, alors $\ell \geq 0$.
2. Soient f et g des fonctions définies sur I et $a \in I$ (ou $\pm\infty$). Démontrer $f \sim g$ en a équivaut à $f = g + o(g)$ en a dans le cas où g ne s'annule pas en a.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction contnue. Montrer que pour tout $z \in [f(a), f(b)]$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = z$. Indication. *Expliquer qu'il suffit de prouver le cas $f(a) < 0 = z < f(b)$ et introduire $c = \sup A$ où $A = f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$. Montrer que c existe. Montrer ensuite par l'absurde que $f(c) \leq \lambda$, et idem $f(c) \geq \lambda$.*
4. Théorème de la limite monotone : existence de limites à droite et à gauche. (Facile en étudiant les bornes de l'image.)
5. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.

10 Semaine du 16 mars 2020

Suites numériques Limites Comparaison de suites Suite croissante majorée, segments emboîtés, suites adjacentes Suites définies par une relation de récurrence, récurrence linéaire double.

Intégration Intégrale d'une fonction continue : croissance, linéarité, relation de Chasles..., théorème fondamental de l'intégration Sommes de Riemann.

1. Montrer qu'une suite réelle croissante majorée (u_n) converge vers $\ell = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante. Alors
   (a) (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ ;
   (b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ell \leq v_n$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue.
   (a) si f est paire, alors pour tout a on a
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$
   (b) et si f est impaire, alors pour tout a on a
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue. Si f est T-périodique, alors
   (a) pour tout a et b, on a
$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt$$
   (b) pour tout a, on a
$$\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt.$$