Exercices de colle en PCSI

17 février 2020

1 Semaines du 23 septembre 2019 & du 30 septembre 2019

1.1 Logique élémentaire

1. Traduire en français les assertions suivantes, et écire leur négation :
   (a) $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I\ f(x) < m$
   (b) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$
   (c) $\exists\, x_0 \in I, \forall\, x \in I,\ f(x) \leq f(x_0)$
2. Traduire :
   (a) La fonction f admet un minimum (sous-entendu atteint)
   (b) La fonction f est injective / elle ne prend pas deux fois la même valeur
3. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :
   $$\forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(n) + f(m).$$
   (Analyse-synthèse attendue.)
4.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturles tels que $n = 2^p(2q+1)$. Donner d'abord des exemples, trouver une méthode sur ces exemples et prouver le résultat (par récurrence forte).
   (b) En déduire que $\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ est irrationnel.

1.2 Applications entre ensembles

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x+y, x-y)$

Exercice 2. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer l'équivalence

$$f(A) \cap B = \varnothing \Longleftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing.$$

Exercice 3. Montrer

$$f \text{ injective } \Longleftrightarrow \forall\, A, B \subset X\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

et dans ce cas vérifier que f induit une bijection sur son image.

1.3 Calculs algébriques

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 5. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$.

Exercice 6. Soit n un entier naturel non nul. Calculer successivement $\sum_{0 \leq i,j \leq n}(i+j)$, $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$,$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$ et $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|$. Après avoir calculé la seconde somme (normalement on trouve $n(n+1)^2/6$ si mon calcul est bon), montrer que $\max(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ pour tous réels x, y et en déduire la troisième connaissant la dernière.

1.4 Étude de fonctions réelles

Exercice 7. [Le logarithme n'est pas un polynôme.]

1. Soit f un polynôme de degré n, $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Démontrer que $x^{-n} f(x)$ admet une limite non nulle en $+\infty$.
2. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tels que, pour tout $x > 0$

$$\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

   On note p le degré de P et q celui de Q (par définition le $n$de f dans la question précédente). Démontrer que $x^{q-p} \ln x$ admet une limite non-nulle en $+\infty$.
3. En déduire une contradiction d'après le cours.

Exercice 8. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Démontrer que $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9. Résoudre $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant 2 et 3 comme périodes. Montrer que f est 1-périodique.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ est croissante. Que dire de la monotonie de la restriction de f à $\mathbb{R}_+$?

2 Semaines du 30 septembre 2019 & du 7 octobre 2019

Espaces vectoriels

Exercice 12. Montrer que l'ensemble des applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(n) + f(m)$$

est un espace vectoriel réel.

Exercice 13. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-e.v ?

1. $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ bornée } \}$
2. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ monotone } \}$
3. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$
4. Ensemble des suites réelles convergentes.
5. Ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prennent la valeur β en α.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v, et soient F et G deux s.e.v de E.

1. Montrer que $F \cup G$ est un s.e.v de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. Indication : pour le sens direct, raisonner par l'absurde, se donner $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$ et étudier le cas de $x + y$.
2. Plus généralement, si n est un entier supérieur ou égal à 2, montrez que E ne peut être la réunion de n sous-espaces vectoriels strictement inclus dans E.

Exercice 15. Écrire les espaces suivants sous la forme d'un $Vect$.

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 3y = 2x+2t\}$ [Par exemple $(1, 1/3, 0, -1/2), (0, 0, 1, 0)$.]
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 2x + z\}$ [Par exemple $(1, 1/2, 0), (0, 1/2, 1)$.]

Exercice 16. Dans les exemples suivants, montrer que les s.e.v F et G de E sont égaux.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1, 1, 3), (1, -1, -1))$, $G = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, -1, 0))$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$, $G = \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$, $G = \text{Vect}((1, 1, -2), (1, -4, 3))$.
4. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 2z - 2t = 0\}$, $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + y + 7z - t = 0 \text{ et } x - 3y + 3z - 5t = 0\}$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, x + y)$. Déterminer son noyau et son image. Est-elle injective, surjective ?

Exercice 18. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi : E \to E, f \mapsto f'$. Cette application est-elle linéaire ? Est-elle injective ? Surjective ? / Déterminer son noyau, son image.

Exercice 19. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

3 Semaines du 14 octobre 2019 & du 21 octobre 2019

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences :

$$f^2 = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \ker f \qquad ; \qquad \ker f^2 \subset \ker f \iff \mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0\}.$$

Exercice 21. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f(\ker g \circ f) = \ker g \cap \mathrm{Im} f.$$

Exercice 22 (Pour plus tard dans l'année)**.** Soient E, F et G trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel A.

1. Est-il vrai que $E \cap (F + G) = (E \cap F) + (E \cap G)$?
2. Est-il vrai que $E \cap (F + (E \cap G)) = (E \cap F) + (E \cap G)$?

Exercice 23 (Pour plus tard dans l'année)**.** Soit I un intervalle non réduit à un point et $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ des nombres réels. Montrer que la famille de fonctions $(t \mapsto e^{\lambda_i t})_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans E. *Indication : on pourra dériver.*

Exercice 24. Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $p^2 = p$. Déterminer une base (famille génératrice) de $\ker p$ et une base (famille génératrice) de $\mathrm{Im} p$.
2. Déterminer une base telle que la matrice de p dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25. Calculer A^n où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26. Soit

$$f : x \in]1, +\infty[\mapsto \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2} \in \mathbb{R}$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

2. (Potentiellement non traité) Trouver la primitive de f qui s'annule en 2 .

Exercice 27. Résoudre selon le paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 3x + y - z & = 1 \\ x - 2y + 2z & = m \\ x + y - z & = 1 \end{cases}$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 28. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + my & = & -3 \\ mx + 4y & = & 6 \end{array} \right.$$

selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ et donner une interprétation géométrique.

Exercice 29. Suivant la valeur du paramètre α, résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha x + y + z + t & = & 1 \\ x + \alpha y + z + t & = & 1 \\ x + y + \alpha z + t & = & 1 \\ x + y + z + \alpha t & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 30. Suivant la valeur du paramètre m, résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array} \right.$$

[Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 2$, compatible ssi $m \neq 2$.]

Exercice 31. Suivant la valeur du paramètre m, résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2 z & = & m \\ mx & - & m^2 y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3 z & = & -1 \end{array} \right.$$

[Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 1, \pm i$, compatible ssi $m \neq 0, \pm i$.]

Exercice 32. Soient a, b, c, x', y', z' six réels.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = \left(\begin{array}{ccccc} x & + & y & + & z \\ ax & + & by & + & cz \\ a(a-1)x & + & b(b-1) & + & c(c-1)z \end{array} \right).$$

Déterminer les valeurs de a, b, c pour lesquelles l'application f est bijective.

2. Déterminer le nombre de solutions du sytème

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & x' \\ ax & + & by & + & cz & = & y' \\ a(a-1)x & + & b(b-1) & + & c(c-1)z & = & z' \end{array}\right.$$

3. Déterminer l'image de $\mathbb{R}^3$ par f.

[Système de Cramer ssi a, b, c sont distincts. Sinon, il y a des solutions quels que soit $d \in \{a, b, c\}$.

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - (a(a-1))L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + (1-(a+b)L_2$ et on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (b-a)y & + & (c-a)z & = & 0 \\ & & & & (c-a)(c-b)z & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui permet de conclure.]

4 Semaines du 4 novembre & 11 novembre 2019

Rentrée : toute l'algèbre linéaire.

Exercice 33 (Trace)**.** Soit $n \geq 2$. On définit la trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}.$$

1. Montrer que la trace est linéaire.
2. L'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est-elle injective ? Surjective ?
3. Vérifier que
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$
Que peut-on dire de la trace de deux matrices semblables, c'est-à-dire $A = P^{-1}BP$ où P est une matrice inversible ?
4. Peut-on trouver deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?
5. *Exclu de l'exercice à cette date.* Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que la trace de la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$. On note ce scalaire $\mathrm{tr} f$.
6. *Idem.* Déterminer la trace d'un projecteur et d'une symétrie.
7. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{tr}$. *(On pourra utiliser la base canonique.)*

Exercice 34 (Algorithme de Gauss-Jordan matriciel appliqué)**.** Déterminer, à l'aide d'opérations élémentaires (sur les lignes), l'inverse de

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ils l'ont fait en 3x3 avec un scalaire à la place du zéro en cours. $EA = I_n$ avec E produit de matrices d'opérations élémentaires). On doit trouver

$$M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 35 (Un très facile.)**.** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Retrouver ce résultat en montrant que $A^2 - 4A + I_2 = 0$.

Exercice 36. Vérifier que

$$\forall\, (A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3 \qquad \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB).$$

A-t-on pour autant $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BAC)$?

Exercice 37. Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto XP'' - 2P' + P$. *On intruduit ici $\mathbb{R}_2[X]$ comme l'ensemble des fonctions polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}$. On admet qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-ev.*

1. Quelle est la matrice de A de u dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 4\gamma \\ \beta + 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Vérifié sur Wolframalpha). Ainsi on est capable de résoudre, étant donné Q un polynôme de degré deux, l'équation $Q = XP'' - 2P' + P$.

3. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k. *Indication : écrire* $A = I_3 + N$ *où* $N^3 = 0$.

Exercice 38. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0.$$

Montrer que A ou B est nulle. *Indication : utiliser des matrices élémentaires.*

(Si l'on suppose $a_{i_0 j_0} \neq 0$ *alors* $AE_{ij}B = 0$ *pour n'importe quel* j *et* $i = j_0$ *donne* $b_{jk} = 0$ *pour tout* k*. Ainsi* $B = 0$*.)*

Exercice 39. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 40. Déterminer deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tels que $AB = 0$ et $BA \neq 0$. Généraliser à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *(Matrices élémentaires.)*

Exercice 41. Calculer la puissance n-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deviner puis prouver par récurrence

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 42. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse. *Indication : penser aux sommes géométriques.*

Exercice 43 (Déterminant par blocs)**.** Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

une matrice carrée par blocs où A et C sont aussi des matrices carrées. Montrer que

$$\det M = \det A \times \det C.$$

Exercice 44 (Déterminant 1)**.** Calculer

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 45 (Déterminant 2)**.** Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 46 (Déterminant 3)**.** Calculer

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2b & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 47 (Déterminant 4)**.** Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ a_{i,j} = \min(i,j)$.

Exercice 48 (Vandermonde guidé)**.** On se donne $n+1$ scalaires $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ et on considère le déterminant suivant

$$V(a_0, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

En raisonnant par récurrence et en effectuant une manipulation sur les colonnes et les lignes, montrer que

$$V(a_0, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

1. Commencer par tuer la première ligne par des opérations sur les colonnes.
2. Développer par rapport à la première colonne et appliquer l'hypothèse de récurrence.

Exercice 49 (Pour ceux qui ont la fibre)**.** Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réels semblables dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A' = P^{-1}AP.$$

Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A' = Q^{-1}AP$. *Je dois retrouver comme l'on fait... il faut écrire $P = M + iN$, en déduire que* $\det(M + XN)$ *est un polynôme non nul, donc qu'il existe un réel t tel que* $\det(M + tN) \neq 0$ *et prendre la matrice associée, qui convient.*

5 Semaines du 18 novembre & du 25 novembre 2019

Exercice 50. Définir $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. (Enchaîner sur un exercice de non-existence de limite même infinie.)

Exercice 51. Déterminer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0}(\sin x)(\sin \frac{1}{x})$

2. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$
3. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

Exercice 52. Montrer que $x \mapsto \frac{x^2 \sin x}{1+x^2}$ n'admet pas de limite lorsque $x \to \infty$. (Même infinie.)

Exercice 53. Étudier la limite de $x \mapsto \frac{E(x)-x}{\sqrt{x}}$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 54. Vérifier que pour tout $x \in]0, \pi/2[$

$$\frac{\pi}{2} x \leq \sin x \leq x$$

et en déduire la limite quand $x \to 0$ de

$$\frac{x + \sin x}{x \ln x}$$

Exercice 55. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. (On suppose donc que f est définie en x_0). Montrer que si f admet une limite en x_0 alors $|f|$ admet également une limite en x_0. (Si f est continue en x_0 alors $|f|$ également. On se ramène toujours à $\ell = 0$.) (Déjà fait en cours.)

Exercice 56. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on suppose continues en x_0 (*ie* admettent une limite en x_0). Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ également. (*Indication : exprimer* $\max(x, y)$ *en fonction de* $(x - y)$ *et* $|x - y|$*).*

Exercice 57. Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Ils l'ont ensuite fait en TD le 18 novembre....

Exercice 58. Étudier les limites suivantes

1. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ en 1
2. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
3. $\frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $+\infty$
4. $\sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$
5. $x^5 e^{-x^2}$ en $+\infty$
6. $\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $+\infty$
7. $\frac{x \ln x + 7}{x^2+4}$ en $+\infty$
8. $\frac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x}$ en $+\infty$

Exercice 59. Calcul d'équivalents. Cf feuille de TD HX1 2013.

Exercice 60. Déterminer lorsqu'elles existent les limites suivantes en utilisant éventuellement des équivalents

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-5x+1}{(3x-1)^4}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}}$

Exercice 61.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient f et g deux fonctions sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{x_0}(f-g) = 0 \Longleftrightarrow e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \quad x \to x_0$$
2. Dans chacun des cas suivants, montrer que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Que peut-on dire de $e^{f(x)}$ et $e^{g(x)}$?
   (a) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$
   (b) $f(x) = x+1$ et $g(x) = x+2$
   (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$
3. Peut-on composer les équivalent ? ($f \sim g$ implique-t-il $h \circ f \sim h \circ g$?

6 Semaines du 2 décembre & du 9 décembre 2019

« Attention, je n'ai pas eu le temps de démontrer le thm de dérivation
des fonctions composées ce matin (ne pas la poser en QC) mais je vous invite
fortement à **faire dériver au moins une fonction composée à chaque étudiant** (après
qu'ils aient soigneusement justifié la dérivabilité, ça va sans dire). Je n'ai pas non plus parlé
de fonctions de classe C^1. Essayer aussi de **faire appliquer le TVI (ou le thm de la bijection)**
au moins une fois à chaque étudiant. »

Exercice 62.

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f a au moins un point fixe.
2. Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues et telles que
$$f \circ g = g \circ f.$$
Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ telle que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 63. Soit f une application continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 64 (nécessite la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). 1. Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2. Déterminer toutes les fonctions continues en un point vérifiant la propriété précédente.
3. Comment peut-on procéder si l'on suppose f dérivable ?

Exercice 65 (nécessite la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)**.** Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x+1) = f(x).$$

Exercice 66.

1. Donner par un dessin l'interprétation géométrique de « f fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet un point fixe.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel qu'il existe a vérifiant $f \circ f(a) = a$. La fonction f a-t-elle des points fixes ? *Indication.*
   (a) *Faire un dessin.*
   (b) *Ensuite, séparer les cas :* $f(a) = a$, $a < f(a)$ *et* $f(a) < a$.
   (c) *Étudier comme d'habitude* $g = f - id$.

Exercice 67. Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ? (Et calculer la dérivée ?)

1. $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
2. $g : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Exercice 68 (Le petit monstre)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right).$$

si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est continue en zéro.
2. Justifier que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Calculer sa dérivée. Quelle est sa limite en zéro ? Est-elle continue en zéro ?
3. Calculer f'' et expliquer ce qu'il se passe.

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

où P_n est une suite de polynômes définie par récurrence.

Exercice 69. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(1/x)}{e^{1/x}-1}$ existe ?

Exercice 70. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)+\tan(5x^2)}{\sin(7x)(\tan(2x)+\sin(4x))}$

Exercice 71. Donner un développement limité à l'ordre n indiqué en $x = 0$ des fonctions suivantes

1. $\tan x \qquad (n = 5) \qquad$ (rép. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$)
2. $e^x \ln(1 + x) \qquad (n = 4) \qquad$ (rép. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$)
3. $\ln(1 - \sin x) \qquad (n = 4) \qquad$ (rép. $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$)
4. $\arctan(e^x) \qquad (n = 3) \qquad$ (rép. $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$)

Exercice 72. Donner un développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 1$ de $(\ln x)/x^2$.

Exercice 73. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}$$

Exercice 74. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + 3h) - 3f(a + h) + 3f(a - h) - f(a - 3h)}{h^3}$$

Exercice 75. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   En déduire la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives.
2. Montrer que $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to \infty$. En déduire la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice 76 (Règle de l'Hôpital. Nécessite Role.)**.** Soient f et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables sur $]a; b[$ et telles que $\forall\, x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

   $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   On commencera par justifier que le membre de gauche est bien défini et on pourra considérer $f - \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bien choisi. *De telle sorte de pouvoir appliquer Rolle à $f - \lambda g$ et bingo !.*
2. En déduire que si

   $$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$$

   quand $x \to a^+$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ aussi.
3. Application : calculer les limites suivantes.
   (a) $\lim_0 \frac{x-\sin x}{x^3}$
   (b) $\lim_0 \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

Exercice 77. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire, f' est paire. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que si f est périodique, f' est périodique. Que dire de la réciproque ?

Exercice 78.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$, que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que
   (a) $x_n \sim n\pi$ *Celui-ci est « évident ».*
   (b) $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$ *D'abord montrer que $x_n - n\pi$ admet une limite qui est $\pi/2$. On admettera éventuellement que la fonction tangente définit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$... ensuite, écrire $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n = o(1)$ et montrer* $\tan(x_n) \sim -1/\varepsilon_n$*. En déduire un équivalent pour ε_n.*
3. Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. *Pousser le dévelooppement limité de* $\tan(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_n)$*. On retrouve les deux premiers termes et on obtient le troisième.*
4. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 79.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de (x_n).
3. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
4. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. *Réinjecter $x_n = \frac{1}{n} + \varepsilon_n$ où $n\varepsilon_n \to 0$. Tout multiplier par n^3, faire apparaître $n\varepsilon_n$ quasiment partout et conclure $n^4\varepsilon_n \to -1$.*

7 Semaines du 16 décembre 2019 & 06 janvier 2020

Exercice 80. Ecrire sous forme algébrique

1. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15}$
2. $(1+j)^3 + (1+j^2)^3$

Exercice 81 (Formes exponentielles...).

1. Écrire sous forme trigonométrique ou exponentielle
   (a) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{2011}$

    (b) $1 + e^{i\theta}$
    (c) $1 - e^{i\theta}$
    (d) $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$. Simplifier $\frac{a+b}{a-b}$ et $\frac{a+b}{1-ab}$.

Exercice 82. Calculer $(1+j)^n$, $(1+j^3)^n$ et $(1+j^2)^n$ de deux manières différentes. On pose ....

Exercice 83.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que 1, z et z^3 soient alignés.
2. Déterminer les nombres complexes z tels que $(1, z, z+i)$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le cercle circonscrit a pour centre l'origine du repère.

Exercice 84. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$
2. $(1+z)^n = (1-z)^n$

Exercice 85. Soit $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

1. Montrer que si z est une racine de P, alors $\overline{z}$ en est également une.
2. Calculer $P(1+i)$.
3. Résoudre $P(z) = 0$.

Exercice 86. Soient A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

— Le triangle ABC est équilatéral.
— j ou j^2 est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$
— $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Exercice 87. Calculer les racines carrées de $z = 8 - 6i$. [Analyse-synthèse brute.]

Exercice 88. Déterminer les complexes z non nuls tels que

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|.$$

[Remarquer qu'alors $|z| = 1$. Faire un dessin et chercher l'argument de z avec $|e^{i\theta} - 1| = 1$.]

Exercice 89. Calculer $(1 - i\sqrt{3})^7$. [Trouver une forme exponentielle pour $1 - i\sqrt{3}$.]

Exercice 90. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et en déduire la valeur de $\sin(\pi/5)$.

Exercice 91. [Plus long et plus dur. Nécessite résolution des éq.]

1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et $1+i$. [Passer par la forme exponentielle par exemple.]
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les solutions complexes l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Pour la rentrée : interprétations géométriques, résolutions du type $\Re = 0$, *manipulations algébriques...*

Exercice 92 (Résolution d'équations).

1. Résoudre $z^3 - z^2(1+2i) + z(9i-1) - 2(1+5i) = 0$ sachant qu'elle admet au moins une racine réelle.
2. Résoudre $z^3 + 2(1-\cos\theta)z^2 + (1-4\cos\theta)z + 2 = 0$ sachant qu'elle admet une solution qui ne dépend pas du paramètre θ.

8 Semaine du 13 janvier 2020 & 27 janvier 2020

Exercice 93. Résoudre $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$. [Utiliser linéarité !]

Exercice 94. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$.

Exercice 95. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + 2iy = 0$ valant 1 en 0 et de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 96. Résoudre

1. $x'' + \omega_0^2 x = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{k/m} > 0$ avec $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = v_0$
2. $x'' + \omega_0^2 x = A$ où $\omega_0 = \sqrt{k/m} > 0$ avec $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = v_0$

Exercice 97. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\mathrm{ch}(t)$.

Exercice 98. Résoudre les équations différentielles suivantes [Bibmath]

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
2. $y' + y = xe^{-x}$

Exercice 99. Résoudre

1. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$
2. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x + e^{3x}$

Exercice 100. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = e^{x^2} y(x)$.

Exercice 101. Résoudre

$$(1 + x^2)y'' + xy' - 4y = 0$$

en posant $x = \mathrm{sh}(t)$.

Exercice 102. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$. *Se ramener à une intégrale positive et conclure à l'aide d'un théorème de cours.*

Exercice 103. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer que sa valeur moyenne est atteinte : il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

Encadrer l'intégrale puis utiliser le TVI (amélioré, ie image du segment).

Exercice 104 (Série harmonique alternée)**.** Pour $n \geq 0$, on définit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$. ($\ln 2$)

Exercice 105 (Cesàro pour les intégrales)**.** Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$. Montrer que

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} a.$$

Exercice 106. On note, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}.$$

Soit $\alpha \in [0, 1[$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

   $$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$

   en encadrant d'abord $\int_0^\alpha$ puis $\int_\alpha^1$.
2. Démontrer que la suite (I_n) ainsi définie est croissante.
3. Déduire de tout ceci qu'elle converge vers 1.
4. En s'inspirant du modèle précédent, étudier

   $$J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-n \sin t} dt.$$

Exercice 107. Calculer l'une des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}$
2. $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ *reconnaitre dérivée de arctan*
3. $\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
4. $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt$ ....

9 Semaines du 3 février & 10 février 2020

EDL1 et intégration (cf exercices quinzaine précédente !)

Exercice 108. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x)f(-x) = 1$. *On pourra introduire la fonction $\varphi(x) = f(x)f(-x)$. On dérive et pouf ! on trouve φ. En remarquant que cette dernière est paire, il ne reste plus beauoup de solutions...*

Exercice 109 (Racordement)**.** On considère l'équation différentielle $xy' + y = \frac{2x}{x^2+1}$.

1. Résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 110. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$ et $\int_0^1 tf(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0, 1[$. *Raisonner par l'absurde, deux fois.*

Exercice 111. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur les intervalles adéquats l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0.$$

Exercice 112. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$. *Étudier $x \mapsto f(x) - x$ en raisonnant par l'absurde et utilisant la continuité.*

Exercice 113. Soient deux réels $a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec g positive.

1. On admettra qu'une fonction continue sur un segment fermé est borné et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe des réels m et M, et $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que $m = f(\alpha) \le f(x) \le M = f(\beta)$. Montrer qu'il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$
2. Soit f continue au voisinage de 0.
   (a) Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$.

(b) Calculer $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt$.

Exercice 114. Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel k positif tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \le k\int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que f est nulle. Si besoin on admettra qu'une fonction continue sur un segment est bornée. *Indication : remarquer que $L : f \mapsto k\int_0^x f(t)dt$ est positive, et appliquer L à l'inégalité, une fois, deux fois, n fois...*

Exercice 115 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Théorique, intégralle de Riemann, pour plus tard !* Soient deux réels $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a, b]$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(f) = \int_a^b f(t)e^{-int}dt$$

soit bien définie.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors la suite $(c_n(f))$ converge vers 0.
2. Établir un résultat analogue dans le cas où f est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
3. Peut-on étendre ce résultat au cas où f est une fonction continue sur $[a, b]$?

Calculs.

Exercice 116.

1. Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $\forall\, x \in [a, b],\ f(a + b - x) = f(x)$. Montrer que
$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$
Licite ?
2. Calculer $\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$.

Semaine du 10 février : EDL1 et Suites.

Exercice 117. $y' - y\tan x = \cos^2(x)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. *On trouve $x \mapsto \lambda/cos(x)$ en solution homogène et en variation de la constante, $\lambda'(x) = \cos^3(x) = \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x))$*

Exercice 118. Solutions de

$$ty'(t) - (t + 1)y(t) = t^2$$

sur $\mathbb{R}$.

Exercice 119. Solutions de

$$y'(t)\sin t - y(t)\cos(t) = e^t \sin^2 t$$

sur $]2n\pi, (2n+1)\pi[$. *Penser à faire un changement de variable pour se simplifier la vie.*

Exercice 120 (D)**.** *PAS EDL1.* Soit f une focntion de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + f \geq 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) + f(x) \geq 0$. *Indication. Poser $\varphi = f'' + f$ et résoudre $f'' + f = \varphi$ puis exploiter $\varphi \geq 0$.*

Exercice 121. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'.

1. On suppose que $\ell = \ell'$. Montrer que la suite $(\min(u_n, v_n))$ converge vers ℓ.
2. On suppose que $\ell < \ell'$. Montrer que la suite $(\min(u_n, v_n))$ converge vers ℓ.

Exercice 122.

1. Donner un exemple où (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent mais pas (u_n).
2. On suppose que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Prouver qu'il en va de même pour (u_n).

Exercice 123. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. Montrer que (u_n) est stationnaire

Exercice 124. Soit (u_n) une suite de réels positifs vérifiant $u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 125 (Moyenne arithmético-géométrique)**.**

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, établir $2\sqrt{ab} \leq a + b$.
2. On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a \quad v_0 = b$$
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$
$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

   Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$, et $v_{n+1} \leq v_n$.
3. Établir que ces deux suites convergent vers une même limite. Elle appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

Exercice 126 (Mines-Ponts PC 2019)**.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

3. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n .

Exercice 127 (Centrale PC 2019)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$, que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que
   (a) $x_n \sim n\pi$ *Celui-ci est « évident ».*
   (b) $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$ *D'abord montrer que $x_n - n\pi$ admet une limite qui est $\pi/2$. On admettera éventuellement que la fonction tangente définit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$... ensuite, écrire $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n = o(1)$ et montrer* $\tan(x_n) \sim -1/\varepsilon_n$*. En déduire un équivalent pour ε_n.*
2. Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. *Pousser le dévelooppement limité de* $\tan(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n)$*. On retrouve les deux premiers termes et on obtient le troisième.*
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 128.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de (x_n).
3. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
4. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. *Réinjecter $x_n = \frac{1}{n} + \varepsilon_n$ où $n\varepsilon_n \to 0$. Tout multiplier par n^3, faire apparaître $n\varepsilon_n$ quasiment partout et conclure $n^4\varepsilon_n \to -1$.*

Exercice 129 (Mines-Ponts PC 2019)**.** Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right).$$

10 Semaines du 17 février & ? ? mars 2020

Suites et dénombrement. Reprendre exercices suites ci-dessus.

Exercice 130 (Règle de D'Alembert)**.** Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_{n+1}/u_n) converge vers une limite ℓ.

1. Si $\ell < 1$, montrer que (u_n) converge vers 0.
2. Si $\ell > 1$, montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
3. Que dire quand $\ell = 1$?

Exercice 131. Étudier la converence des suites complexes (z_n) définies par

1. $z_n = x_n + iy_n$ avec (x_0, y_0) fixés et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n)$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ *Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. On trouve $z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i)z_n$. Trouver argument, période...*
2. $z_{n+1} = \frac{i}{2}z_n + 1$ *Si traitement bon auparavant. Suite arithmético-géométrique : trouver une limite probable (point fixe), et la retrancher.*

Exercice 132. On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = re^{i\theta}$ ($\theta \in]-\pi, \pi]$) et

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

On note r_n le module de z_n et θ_n un argument dans $]-\pi, \pi]$.

1. Effectuer la construction géométrie de z_{n+1} à partir de z_n.
2. Exprimer r_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de r_n et θ_n , et en déduire la limite de (θ_n). *Arc moitié ou calcul explicite du module.*
3. Étudier la suite $u_n = r_n \sin(\theta/2^n)$ et en déduire r_n et $\lim r_n$, puis la limite de (z_n). *La suite (u_n) tend vers zéro car r_n est borné (ce qui se montre par récurrence). Remarquer qu'en fait $u_n = \Im(z_n)$ et que $u_{n+1} = ... \to$ est une suite très simple ! Expression de r_n triviale et ok.*

Exercice 133. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

1. Montrer que u_n existe et $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{2}|^2}{2}.$$

   Indication : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{u_n^2 + 2 - \sqrt{2}u_n}{u_n} \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|^2$ car $u_n > 1$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$$

   et donner la limite de (u_n).
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

Exercice 134. Donner le terme général et étudier la convergence des suites définies par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et

1. $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$
2. $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$
3. $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$
4. $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ hihi

Exercice 135. $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 1$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Deux façons de calculer la limite de H_n.

1.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$
   Indication : étudier une bonne fonction ou utiliser une inégalité de convexité, si connue.

   (b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

   (c) En déduire l'existence d'une constante γ et d'une suite (w_n) tendant vers 0 tels que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$. (constante d'Euler)

   (d) Limite de H_n ?

   (e) Limite de $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$?

2.
   (a) Montrer $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

   (b) En déduire $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Exercice 136.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n = |E|$. Soit A une partie de E, de cardinal p.

1. Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant exactement un élément de A ?
2. Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant au moins un élément de A ?

Exercice 137. Le but de cet exercice est de dénombrer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

1. Remarquer qu'une telle application est injective.
2. En déduire une condition sur n et p pour que l'ensemble que l'on dénombre ne soit pas vide.
3. ..

Exercice 138. Soit E un ensemble fini. Montrer que
$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}.$$

Indication : faire le changement de variable $Y = X^c$ ou bien diviser la somme selon le nombre d'élements de X.

Exercice 139. Calculer
$$\sum_{X,Y\in\mathcal{P}(E)} |X\cap Y|$$
et
$$\sum_{X,Y\in\mathcal{P}(E)} |X\cup Y|.$$

Indication : procéder en séparant la somme selon le cardinal de l'intersection. Utiliser l'exercice précédent éventuellement pour la seconde question.

Normalement cela donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{|X\cap Y|=k}|X\cap Y| &= \sum_{k=0}^{n} k \sum_{|X\cap Y|=k} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \times \sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j} \times \sum_{\ell=0}^{n-k-j}\binom{n-k-j}{\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \times \sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j} \times 2^{n-k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \times 3^{n-k} \\
&= n\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'} \times 3^{n-1-k'} \\
&= n4^{n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 140. [Formule du crible.] Soit $E_1,...,E_n$ une famille d'ensemble finis.

1. Montrer que $|E_1\cup E_2| = |E_1|+|E_2|-|E_1\cap E_2|$.
2. Montrer que $|E_1\cup E_2\cup E_3| = |E_1|+|E_2|+|E_3|-|E_1\cap E_2|-|E_1\cap E_3|-|E_2\cap E_3|+|E_1\cap E_2\cap E_3|$.
3. Montrer par récurrence que
$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{I\subset[\![1,n]\!],|I|=k} |\cap_{i\in I} E_i|\right).$$

Exercice 141. On dispose de 12 mouchoirs identiques, qui ne diffèrent que par leur couleur : 5 sont bleus, 4 sont verts et 3 sont rouges. On forme une pile constituée de tous ces mouchoirs.

1. Combien peut-on former de piles différentes ?
2. Dans combien de ces dispositions retrouve-t-on les mouchoirs rouges au dessus de la pile ?

Exercice 142.

Exercice 143.

Exercice 144.

Exercice 145.

Exercice 146.

Exercice 147.

Exercice 148.

Exercice 149.

Exercice 150.

Exercice 151.

Exercice 152.

Exercice 153.

Exercice 154.

Exercice 155.

Exercice 156.

Exercice 157.

Exercice 158.

Exercice 159.

Exercice 160.

Exercice 161.

Exercice 162.

Exercice 163.

Exercice 164.

Exercice 165.

Exercice 166.