Questions de cours en PCSI 1

24 janvier 2020

1 Semaine du 23 septembre 2019

1. Démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les deux formules
$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, |x+y| \leq |x| + |y|$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$
[Utilise $|x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq (|x|^2 + |y|^2)$.] Cas d'égalité ?
2. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est par rationnel.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (quelconque). Montrer qu'il existe un et un seul couple de fonctions (g, h) tel que $f = g + h$ avec g paire et h impaire.
4. Démontrer la proposition suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}\, (x = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\, |x| \leq \varepsilon)).$$
En déduire
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\, (a = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\, |a - b| \leq \varepsilon)).$$
5. Cours de logique.
   (a) Quelle est la négation de $(P) \Rightarrow (Q)$? (Utiliser $(A \Rightarrow B) = (\text{non}A \text{ ou } B)$ par défintion).
   (b) Montrer qu'une affirmation $(P) \Rightarrow (Q)$ et sa contraposée sont simultanément vraies ou fausses. (Elles ont la même négation...)
6. Montrer que pour tout $n \geq 1$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
(Rédaction parfaite de la récurrence attendue.) [Sans donner la formule.]
7. Soit $f : X \to Y$ une application entre deux ensembles X et Y. Soient A et B des parties de X. Donner la définition quantifiée de $f(A)$ et montrer
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
puis donner un exemple simple où la dernière inclusion est stricte.

8. Même notations excepté A et B des parties de Y. Donner la définition quantifiée de $f^{-1}(A)$ et montrer

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

9. Rappeler la définition, le domaine de définition des fonctions sh et ch. Allure du graphe. Propriétés ? (Parité, relation fondamentale $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ démontrée).
10. Montrer l'une des propositions suivantes
    (a) f et g surjectives implique $f \circ g$ surjective
    (b) f et $g$bijectives implique $f \circ g$ bijective
    (c) $f \circ g$ injective implique g injective
    (d) $f \circ g$ surjective implique f surjective
11. Montrer que si f et g sont bijectives, alors $f \circ g$ est bijective et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
12. Montrer

$$\forall\, x \in [-1, 1] \ \ \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

[À partir de $\cos^2 + \sin^2 = 1$]

13. Soient a et b deux constantes réelles avec $a \neq 0$. Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

sont de la forme

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

avec C une constante. Comment déterminer C ? [Ils l'ont fait par analyse-synthèse. Si y est une solution poser $z(x) = y(x)e^{-ax}$ et trouver z grace à z'. Il l'ont aussi fait à la physicienne.]

2 Semaine du 30 septembre 2019

Semaine précédente (chapitre 0) plus un peu d'espaces vectoriels.

1. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un espace vectoriel.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

3 Semaine du 7 octobre 2019

Espaces vectoriels à fond.

1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
   (a) Définir « f est linéaire ».
   (b) Définir $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.
   (c) Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des s.e.v respectivement de E et de F.
2. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
   (a) Définir « f est linéaire ».
   (b) Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$, et que f est injective si et seulement si $\ker f = \{0\}$.
3. Soit E un espace vectoriel et $v_1, ..., v_n \in E$. Donner la définition de l'ensemble $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_n)$ et montrer qu'il s'agit d'un s.e.v de E.
4. [...]

4 Semaine du 14 octobre 2019

1. Soient A et B des matrices telles que AB a un sens. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
2. Montrer que toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose en une somme $M = S + A$ où S est symétrique et A antisymétrique.
3. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5 Semaine du 4 novembre 2019

1. Soient A et B des matrices carrées inversibles. Énoncer et démontrer $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $\left({}^tB\right)^{-1} = {}^t\left(B^{-1}\right)$, et montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe non commutatif pour la multiplication matricielle.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Donner la définition et montrer que dans ce cas l'inverse est unique.
3. Montrer que pour toute application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $f(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{K}^p$.
4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales carrées de taille n est un s.e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. (Exhiber une famille génératrice...) Même question avec $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ matrices triangulaires positives. Que vaut $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ (est-ce un s.ev.) ?
5. (Eventuellement) Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

6 Semaine du 11 novembre 2019

1. Donner le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure par exemple) et le démontrer. Quand est-elle inversible ? Quelle forme a l'inverse ?
2. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est jamais inversible.
3. Montrer qu'une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, montrer que
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$
4. Montrer que $\det \lambda A = \lambda^n \det A$ pour toute matrice A et scalaire λ.

7 Semaine du 18 novembre 2019

1. Tester la connaissance de la définition d'une limite. Recherche du δ.

Unicité de la limite Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle réel non vide. Soit $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que $f(x)$ tend vers ℓ_1 lorsque x tend vers x_0. Montrer que si $f(x)$ tend vers ℓ_2 lorsque x tend vers x_0, alors $\ell_2 = \ell_1$.

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle réel non vide. Soit $x_0 \in \overline{I}$. Si $f(x) \geq 0$ pour tout x et si $f(x)$ converge vers ℓ, alors $\ell \geq 0$.
3. Montrer que si f et g admettent une limite en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ admet une limite en x_0. Montrer que si $x \to \infty$, et que f admet une limite non nule en $+\infty$, alors $1/f(x) \to \ldots$.

Composition des limites Montrer que si f admet une limite en a valant α et que g admet une limite en α valant ℓ alors $g \circ f$ (quand tout ceci a du sens, préciser !) admet une limite en a valant ℓ.

4. Théorème des gendarmes en un point réel.
5. Si $f(x)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0. En particulier, si f converge vers $\ell \in]a, b[$ alors $f(x) \in]a, b[$ pour x proche de x_0. Et si $f(x)$ converge vers $\ell > 0$ alors $f(x) \geq \ell/2 > 0$ pour x proche de x_0.

8 Semaine du 25 novembre 2019

1. Montrer que la limite de $\sin(x)/x$ en 0 existe et vaut 1. *Avec des comparaisons d'aires donnant sur* $]0, \pi/2[$ *les inégalités suivantes*
$$\cos x \leq (\sin x)/x \leq 1/\cos x.$$
2. Soient f et g des fonctions définies sur I et $a \in I$ (ou $\pm\infty$). Démontrer $f \sim g$ en a équivaut à $f = g + o(g)$ en a dans le cas où g ne s'annule pas en a.

3. Dessiner le graphe de $x \mapsto x^\alpha$ suivant les valeurs de α. (Définition ?)
4. + Questions de cours de la semaine précédente.

On rappelle que l'on a le droit de multiplier, diviser des équivalents lorsque cela est licite.

dans le cas où b est un réel et f croissante.

9 Semaine du 2 décembre 2019

1. Montrer que $\lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0$ (étudier $x \mapsto x \ln x$ sur $]0, 1]$ et montrer que $\sqrt{x} \leq 1/e \Rightarrow -1/e \leq \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) \leq 0$. Conclure par encadrement.). En déduire que pour tous $\alpha, \beta > 0$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$.
   (a) $(\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$ quand $x \to \infty$
   (b) $x^\alpha = o(e^{\beta x})$ quand $x \to \infty$
   (c) $e^{\beta x} = o(\frac{1}{|x|^\alpha})$ quand $x \to -\infty$.
2. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$
pour tout réel $a \in \mathbb{R}$.
3. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe.
4. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction contnue. Montrer que pour tout $z \in [f(a), f(b)]$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = z$. Indication. *Expliquer qu'il suffit de prouver le cas $f(a) < 0 = z < f(b)$ et introduire $c = \sup A$ où $A = f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$. Montrer que c existe. Montrer ensuite par l'absurde que $f(c) \leq \lambda$, et idem $f(c) \geq \lambda$.*

10 Semaine du 09 décembre 2019

1. Montrer que
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + o(x^n) \qquad x \to 0.$$
2. Montrer que si
$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + o(h^n)$$
alors $a_k = b_k$ pour tout k.
3. Que dire du $DL_n(0)$ d'une fonction paire ?
4. Énoncer (et démontrer ?) la formule de Taylor-Young. Développement limité de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ en 0.
5. Développement limité de $\exp x$, $\cos x$ et $\sin x$ en 0.

11 Semaine du 16 décembre 2019

Colles bicolores avec un DL et une application, et le début des complexes. Pour ce qui est des complexes, n'attendez aucune virtuosité de leur part (contrairement à ce que vous verrez pour les DLS où tous sont censés se débrouiller correctement...) : essayez de leur faire dessiner au moins un nombre complexe ! Ps : contrairement à ce qui est écrit dans la fiche de synthèse, ils ne savent pas résoudre $z^n = a$ ni résoudre les équations du second degré à coeffs complexes.

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire les deux formules
$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}\, |z+z'| \leq |z| + |z'|$$
$$\forall\, z, z' \in \mathbb{R}\, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$
Cas d'égalité ?
2. Énoncer et démontrer les formules d'Euler
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$
pour tout réel θ. [Simple inversion d'un système...]
3. Énoncer et démontrer la formule de Moivre
$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$
pour tout entier naturel n et réel θ. [Récurrence attendue.]
4. Énoncer et prouver les propriétés d'addition et de passage à l'inverse de l'exponentielle complexe. [J'attends une bonne définition de l'exp, avec les bons ensembles de départ et d'arrivée, et ensuite ça doit rouler. L'inverse c'est l'addition appliquée à z et $-z$.]
5. Résoudre $e^z = a$ dans le cas général.
6. Somme des racines de l'unité.

12 Semaine du 06 janvier 2020

Nombres complexes.

1. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ pour a, b, c des complexes.
2. Résoudre $z^2 = a$ dans le cas général.

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$. Alors f_α est dérivable et
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'_\alpha(t) = \alpha e^{\alpha t}.$$

13 Semaine du 13 janvier 2020

1. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$. Alors f_α est dérivable et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'_\alpha(t) = \alpha e^{\alpha t}.$$

2. Résolution des EDL2 à coeffs constants.
3. Monttrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue *croissante* et *positive* alors f possède au moins une primitive sur I, et pour tout $a \in I$ il existe une unique primite F de f qui s'annule en a et on note

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f$$

4. Relation de Chasles
5. Linéarité de l'intégrale
6. Positivité de l'intégrale ($f \geq 0$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$). Inégalité triangulaire, encadrement par inf et sup.

14 Semaine du 20 janvier 2020 : Ski

15 Semaine du 27 janvier 2020

Je n'ai pas eu le temps de faire la variation de la constante ce matin.

Du coup, je vous propose de ne pas interroger les étudiants sur les EDL1 la semaine prochaine (ou alors en toute fin de colle, une EDL 1 débile, plutôt homogène, pour conclure) et de vous concentrer sur

— *l'intégration (tout le chapitre),*

— *les fonctions arctrucs (ils savent dorénavant les dériver).*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue.
   (a) si f est paire, alors pour tout a on a

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$$

   (b) et si f est impaire, alors pour tout a on a

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction continue. Si f est T-périodique, alors

(a) pour tout a et b, on a

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

(b) pour tout a, on a

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

3. La fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à $\frac{1}{1+x^2}$.
4. La fonction arcsin est continue sur $[-1,1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et de dérivée égale à $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. La fonction arccos est continue sur $[-1,1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et de dérivée égale à $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 \in I$. Soit $F : x \mapsto \int^x f$ une primitive de f. Si f possède un $DL_n(x_0)$ alors F possède un $DL_{n+1}(x_0)$ obtenu en intégrant terme à terme.