Exercices de colle en MPSI

10 mars 2020

1 Semaine du 23 septembre 2019

1.1 Logique élémentaire

Exercice 1. Traduire en français les assertions suivantes, et écire leur négation :

1. $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I\ f(x) < m$
2. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}$
3. $\exists\, x_0 \in I,\ \forall\, x \in I,\ f(x) \leq f(x_0)$

Exercice 2. Traduire :

1. La fonction f admet un minimum (sous-entendu atteint)
2. La fonction f est injective / elle ne prend pas deux fois la même valeur

Exercice 3. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(n) + f(m).$$

(Analyse-synthèse attendue.)

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturels tels que $n = 2^p(2q+1)$. Donner d'abord des exemples, trouver une méthode sur ces exemples et prouver le résultat (par récurrence forte).
2. En déduire que $\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ est irrationnel.

1.2 Nombres complexes

Exercice 5. Calculer les racines carrées de $z = 8 - 6i$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ où θ réel
3. $z^2 - (6+i)z + (11+13i) = 0$ [Début d'un carré... ou cours]

Exercice 7. Déterminer les complexes z tels que

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|.$$

Exercice 8. Calculer $(1 - i\sqrt{3})^7$.

Exercice 9. Calculer

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{4})}$$

et en déduire $\tan(\frac{\pi}{24})$.

Exercice 10. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et en déduire la valeur de $\sin(\pi/5)$.

Exercice 11. [Plus long et plus difficile]

1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et $1+i$. [Passer par la forme exponentielle par exemple.]
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les solutions complexes l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

2 Semaine du 30 septembre 2019

2.1 Calculs algébriques

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 13. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$.

Exercice 14. Soit n un entier naturel non nul. Calculer successivement $\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)$, $\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)$,$\sum_{1\leq i,j\leq n}\max(i,j)$ et $\sum_{1\leq i,j\leq n}|i-j|$. Après avoir calculé la seconde somme (normalement on trouve $n(n+1)^2/6$ si mon calcul est bon), montrer que $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ pour tous réels x, y et en déduire la troisième connaissant la dernière.

Exercice 15. Pour $n \geq 1$, simplifier l'expression

$$\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2$$

et déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 16. Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

et donner sa limite lorsque $n \to +\infty$

2.2 Logique

Exercice 17. Montrer que $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ pour tous réels x, y.

3 Semaine du 7 octobre 2019

Exercice 18. Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

et donner sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 19. Déterminer (sous couvert d'existence) les majorants, minorants, borne sup, inf, plus grand élément, plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}$$

$$]0,1[\cap \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N}$$

$$\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 20. Soit

$$f : x \in]1,+\infty[\mapsto \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} \in \mathbb{R}$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

2. (Potentiellement non traité) Trouver la primitive de f qui s'annule en 2
.

Exercice 21. Résoudre selon le paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} 3x+y-z &= 1 \\ x-2y+2z &= m \\ x+y-z &= 1 \end{cases}$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 22. Montrer $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ et $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$. (séparer les cas) Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercice 23. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer les inégalités suivantes.

1. $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$ (écrire $2x=(x+y)+(x-y)$ et IT)
2. $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$ (poser $u=x-1$ et $v=y-1$)
3. Étudier les variations de $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}.$$

Exercice 24. Résoudre le système

$$\begin{cases} x+my & =-3 \\ mx+4y & =6 \end{cases}$$

selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ et donner une interprétation géométrique.

Exercice 25. Soit x un réel.

1. Donner l'encadrement qui définit la partie entière $E(x)$.($E(x) \leq x < E(x)+1$
2. Soit $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} E(nx)}{n^2}$. Donner un encadrement simble de $n^2 \times u_n$ en utilsant $\sum_{k=1}^{n} k$. (somme l'encadrement)
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.(On se rappelle ce que vaut $\sum_{k=1}^{n} k$)
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

S'ils ont vu les relations d'équ : montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe et dénombrable d'intervalles ouverts (non vides).

Exercice 26. Résoudre l'équation

$$x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exercice 27. Résoudre

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x.$$

4 Semaine du 14 octobre 2019

Exercice 28. Montrer l'inégalité

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Faire un dessin l'illustrant.

Exercice 29.

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \qquad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$
2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n-ième de
$$f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \longmapsto \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$
3. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les nombres réels x tels que $f^{(n)}(x) = 0$. Interpréter graphiquement les cas $n = 0, 1, 2$.

Exercice 30. Soit λ un réel. Déterminer le minimum de la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \ln x.$$

Exercice 31.

1. Donner le domaine de définition et l'allure de la fonction arctan.
2. Simplifier
$$\arctan a + \arctan b - \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$
pour $ab \neq 1$. [Utiliser dérivation en fixant un terme, ou la formule $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ pour $x, y \neq \pi/2 \bmod \pi$.].
3. Que dire si $ab = 1$?

Exercice 32. On considère la fonction $b(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction
2. Est-elle dérivable et sur quel intervalle ? Calculer la fonction dérivée.
3. Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction par rapport à sa tangente au point d'abscisse $x = 1$.
4. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 33. Soient p et q deux réels, et pour x dans $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3 + px + q$. On se propose de déterminer le nombre de réels x tels que $f(x) = 0$.

1. On suppose $p \geq 0$. Tracer le tableau de variations de f et conclure dans ce cas.
2. On suppose $p < 0$. Tracer le tableau de variations de f.
3. Soient x_1 et x_2 les points d'annulation de f'. Calculer $f(x_1) \times f(x_2)$ en fonction de p et q.
4. Déterminer, en fonction de la quantité $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ le nombre de solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 34. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f est deux fois dérivable sur I et que f'' est positive sur I. Le but est de montrer que f est au-dessus de sa tangente au point a. On pose, $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Calculer g'' et $g'(a)$. Déterminer le signe de g', donner le tableau de variations de g et conclure. Les fonctions possédant la propriété précédente sont dites *convexes.*

5 Semaine du 04 novembre 2019

Et reprendre éventuellement de la semaine d'avant.

Exercice 35. Simplifier $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. *Indication : reconnaitre une identité trigo... (Dériver ou poser $x = \tan\theta$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.)*

Exercice 36. Calculer

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^1 \arcsin x\mathrm{d}x.$$

Exercice 37. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^t \cos(x-t)\mathrm{d}x.$$

Exercice 38. Donner une primitive des fonctions suivantes, en précisant sur quels intervales.

1. $\frac{\ln x}{x}$
2. $\frac{1}{t\ln t}$
3. $\sin^3 t$
4. $\frac{1}{4-t^2}$
5. $x\sqrt{x^2-1}$
6. $\frac{x+1}{x^2+x+2}$
7. $\frac{1}{(x^3-x)}$

Exercice 39. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^3 |x^2-1|\mathrm{d}x$.
2. $\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} e^x \cos x\mathrm{d}x$.
3. $\int_0^1 x^2 e^x \mathrm{d}x$.

Exercice 40.

1. Justifier l'égalité

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\mathrm{d}t.$$

2. En déduire

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t.$$

Indication : calculer $\cos(\pi/4-t)$ pour $t \in [0, \pi/4]$ et d'autre part $1+\tan t$.

Exercice 41. Résoudre

1. $2\ln(2x-1) - \ln(5-2x) - \ln 2 \leq 0$
2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$.

Exercice 42. Résoudre $y' + y = e^{-x} + e^{-2x}$. [Utiliser linéarité !]

Exercice 43. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\mathrm{ch}(t)$.

Exercice 44. Résoudre les équations différentielles suivantes [Bibmath]

1. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
2. $y' + y = xe^{-x}$

6 Semaine du 11 novembre 2019

6.1 Équations différentielles de la semaine passée.

Exercice 45. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur les intervalles adéquats l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0.$$

Exercice 46. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = e^{x^2} y(x)$.

Exercice 47. Résoudre

$$(1 + x^2)y'' + xy' - 4y = 0$$

en posant $x = \mathrm{sh}(t)$.

6.2 Manipulations d'ensembles

Exercice 48. Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On pose

$$A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B).$$

Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \Delta B \subset B$.

Exercice 49. Préciser les inclusions ou égalités existant entre les ensembles suivants :

$$\cap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1 + \frac{1}{n}] \qquad \cap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1 + \frac{1}{n}[\qquad \cup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}] \qquad \cup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}[$$

Exercice 50. Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ définie par

$$f(X) = (A \cap X, B \cap X).$$

1. À quelles conditions sur A et B, f est-elle injective ? *Réponse : $A \cup B = E$ car ces deux ensembles ont même image.*
2. À quelles conditions sur A et B, f est-elle surjective ? *Réponse : $A \cap B = \varnothing$ pour que $(\varnothing, B)$ ait un antécédent.*
3. Si f est bijective, déterminer sa réciproque.

7 Semaine du 18 novembre 2019

Exercice 51. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x+y, x-y)$

Exercice 52. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer l'équivalence

$$f(A) \cap B = \varnothing \iff A \cap f^{-1}(B) = \varnothing.$$

Exercice 53. Montrer

$$f \text{ injective } \iff \forall\, A, B \subset X\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

et dans ce cas vérifier que f induit une bijection sur son image.

Exercice 54. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 55. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\forall\, t \in I\ \exists\, \varepsilon > 0\ ]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\subset U$.

1. Montrer que $x \sim y \Leftrightarrow]x, y[\subset U$ ou $]y, x[\subset U$ définit une relation d'équivalence sur U.
2. Montrer qu'une classe d'équivalence C est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour cela, prendre deux éléments a, b dans la même classe, et montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset C$.
3. En déduire que U est une union disjointe d'intervalles ouverts non vides.

4. Montrer que cette union est dénombrables.

Exercice 56. Soit $f : E \to I$ une application surjective. On pose $A_i = f^{-1}(\{i\})$ pour tout $i \in I$. Montrer que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E. Donner un exemble où f est surjective, B_i une partition de E et $f(B_i)$ pas une partition de I.

Exercice 57. Soit E un ensemble non vide et C un sous-ensemble de E. On définit une relation $\mathcal{R}$ par

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\Delta B = C$$

où $A\Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.

1. Sur quel ensemble est définie cette relation ?
2. Détermoner tous les sous-ensembles C de E tels que
   (a) $\mathcal{R}$ est réflexive (ie ARA)
   (b) $\mathcal{R}$ est symétrique (ARB->BRA)
   (c) $\mathcal{R}$ est antisymétrique (ARB et BRA -> A=B)
   (d) $\mathcal{R}$ est transitive (ARD et DRB -> ARB)

Exercice 58. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que

$$\forall\, A \subset F\ \forall\, B \subset F\ f^{-1}(A\Delta B) = f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(B).$$

8 Semaine du 25 novembre 2019

Exercice 59. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

En déduire que

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

admet une borne inf et une borne sup. Les calculer.

Exercice 60. Déterminer (sous couvert d'existence) les majorants, minorants, borne sup, inf, plus grand élément, plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0,1] \cap \mathbb{Q}$$

$$]0,1[\cap \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N}$$

$$\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 61. Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall a \in A \, \forall b \in B \quad a \leq b$$

Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 62. Montrer que si x, y sont des réels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels, alors $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

Exercice 63. Soient I et J deux intervalles ouverts tels que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \varnothing$. Montrer que $I \cap J = \varnothing$.

Exercice 64. Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note

$$B = \{|x - y| \mid x, y \in A\}.$$

1. Montrer que B est majorée.
2. Justifier qu'il admet une borne supérieure. On la note δ. Montrer que $\delta = \sup(A) - \sup(B)$.

9 Semaine du 02 décembre 2019

Exercice 65 (Cesaro)**.** Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers ℓ. On pose $a_0 = u_0$ et pour tout $n > 0$

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que (a_n) converge vers ℓ.

Exercice 66. $e \notin \mathbb{Q}$ Soient

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$b_n = a_n + \frac{1}{n(n!)}$$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes. On admet que leur limite commune est e (ou alors on définit leur limite comme étant e).
2. On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a_q < e < b_q$ puis obtenir une absurdité.

Exercice 67. Montrer que $\sin n$ diverge.

Exercice 68 (Moyenne arithmético-géométrique)**.**

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, établir $2\sqrt{ab} \leq a + b$.

2. On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a \quad v_0 = b$$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$, et $v_{n+1} \leq v_n$.

3. Établir que ces deux suites convergent vers une même limite. Elle appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a, b)$.

Exercice 69. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. Montrer que (u_n) est stationnaire

Exercice 70. Soit (u_n) une suite de réels positifs vérifiant $u_n \leq 1/k + k/n$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 71. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

10 Semaine du 09 décembre 2019

Exercice 72 (D)**.** Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} - n \to 0$.

Exercice 73. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'.

1. On suppose que $\ell = \ell'$. Montrer que la suite $(\min(u_n, v_n))$ converge vers ℓ.
2. On suppose que $\ell < \ell'$. Montrer que la suite $(\min(u_n, v_n))$ converge vers ℓ.

Exercice 74. Étudier la nature de

$$u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^\alpha}$$

en fonction de $x, \alpha \in \mathbb{R}$, et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 75. $\sum_{k=0}^{n} k!/n!$

Exercice 76 (Comparaison logarithmique)**.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, telles que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. On suppose que (v_n) converge vers 0. Montrer qu'il en va de même pour (u_n). *Indication : montrer que $u_n/u_0 \leq v_n/v_0$.*

2. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Que dire de (v_n) ?

Exercice 77 (Produit de Cauchy)**.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers u et v. Montrer que $w_n = \frac{u_0 v_n + \ldots + u_n v_0}{n+1}$ converge vers uv.

Exercice 78.

1. Donner un exemple où (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent mais pas (u_n).
2. On suppose que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Prouver qu'il en va de même pour (u_n).

Exercice 79. Soit (u_n) une suite de nombre réels.

1. On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ? *Elle admet une sous-suite majorée.*
2. Du coup : on suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire ?
3. On suppose que (u_n) n'est pas majorée (et pas forcément croissante). Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 80. En utilisant BW, montrer que de toute suite réelle on peut extraire une sous-suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Exercice 81. Le but de cet exercice est de montrer que toute suite possède une suite extraite monotone. Soit (u_n) une suite quelconque. On définit

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p > n \; u_p < u_n\}.$$

1. On suppose que E est infini. Grâce à ses éléments, construire une suite extraite strictement décroissante.
2. On suppose maintenant que E est fini. Soit $N = \max(E)$. Montrer que si $n > N$ alors il existe $p > n$ tel que $u_p \geq u_n$. Construire ainsi une suite extraite de (u_n) est croissante.
3. Conclure.
4. En déduire une nouvelle démonstration de Bolzano-Weierstrass.

11 Semaine du 16 décembre 2019

Loi de composition interne, groupes généraux, groupe symétrique.

Groupes

Exercice 82. Soit $(G, \cdot)$ un groupe de neutre e et $(a, b) \in G^2$.

1. Montrer que si a, b et ab sont d'ordre 2 alors $ab = ba$.
2. Montrer que si a est d'ordre fini, alors a^{-1} aussi et ces deux éléments ont le même ordre.

3. Montrer que si a est d'ordre fini, alors bab^{-1} aussi, et est de même ordre que a.
4. Montrer que si ab est d'ordre fini, alors ba aussi, et est de même ordre que ab. $(ba)^k = b(ab)^{k-1}a = b(ab)^{-1}a = bb^{-1}a^{-1}a = e$

Exercice 83. Soit $(G, \cdot)$ un groupe, on note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes du groupe G.

1. Montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe.
2. Soit $a \in G$. On définit

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a \cdot x \cdot a^{-1} \end{array} \right.$$

   Montrer que $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$. On l'appelle *automorphisme intérieur* associé à a.
3. Montrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.
4. On considère à présent

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ a & \mapsto & \varphi_a \end{array} \right.$$

   Montrer que ψ est un morphisme de groupe et déterminer son noyau.

Exercice 84. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et a un élément de G. Montrer que la transposition

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a \cdot x \end{array} \right.$$

est bijective.

Exercice 85. Soient les quatre fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = -1/x$. Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition usuelle est un groupe. Écrire sa table.

Exercice 86. Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e et tel que $\forall\, a \in G,\ a^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Soit H un sous-groupe de G, distinct de G et $a \in G \setminus H$. Montrer que $aH \cap H = \varnothing$ et que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G.
3. En déduire que, si G est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner un exemple de groupe G vérifiant la propriété de l'exercice et de cardinal 2^n .

Exercice 87. Soit G un groupe et A une partie non vide de G stable par passage au symétrique (à l'inverse). On définit le centraliseur de A par

$$C(A) = \{x \in G \mid \forall\, a \in A \quad a \cdot x = x \cdot a\}.$$

Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 88. Le but de l'exerice est de montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par la transposition $(1, 2)$ et le cycle $\sigma = (1, 2, ..., n)$.

1. Démontrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1, 2), (1, 3), ..., (1, n)$. *Ecrire* (i, j) *en fonction de* $(1, i), (1, j)$.
2. Démontrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transposition $(1, 2), (2, 3), ..., (n-1, n)$. *Montrer par récurrence sur* k *que tout* $(1, k)$ *s'écrit comme produit de transpositions* $(i, i + 1)$.
3. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par la transposition $(1, 2)$ et le cycle $\sigma = (1, 2, ..., n)$. *Indication : on pourra calculer* $\sigma \circ (i, i + 1) \circ \sigma^{-1}$.

Exercice 89. Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. *Chercher les orbites, commencer par* 1 *!*
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions. $\sigma = (13)\circ(36)\circ(62)\circ(25)\circ(47)$ *en remarquant que* $(13625) = (13)\circ(36)\circ(62)\circ(25)$.
4. Calculer σ^{2019}.

Exercice 90. Soit $n \geq 3$.

1. Soient $a \neq b \in \{1, ..., n\}$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Quelle est la permutation $\sigma \circ (a, b) \circ \sigma^{-1}$? *C'est* $(\sigma(a), \sigma(b))$.
2. On appelle centre du groupe symétrique l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui commutent avec toutes les autres. Le déterminer. *Regarder ce que donne* σ *commute avec* $(1, 2)$, $(1, 3)$.

12 Semaine du 06 janvier 2020

Exercice 91 (Entiers de Gauss)**.** On définit $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. On munit G des lois induites par $\mathbb{C}$, montrer que G est un anneau commutatif intègre. S'agit-il d'un corps ?
2. Montrer que la partie I de G formée des éléments inversibles pour la multiplication peut être munie d'une structure de groupe dont on donnera la description.
3. Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de G (il n'y en a que deux).

Exercice 92. Soit $(A, +\times)$ un anneau.

1. Montrer que si $x \in A$ est nilpotent alors $1 - x$ est inversible et préciser son inverse.

2. Montrer que si $a, b \in A$ et ab est nilpotent, alors ba est nilpotent.
3. Montrer que si a et b sont nilpotents et commutent, alors $a + b$ est nilpotent.
4. Montrer que si $1-ab$ est inversible, alors $1-ba$ est inversible. *On devinera*

   $$(1-ba)(1+b(1-ab)^{-1}a) = (1-ba)+b(1-ab)^{-1}a-bab(1-ab)^{-1}a = 1-ba+b(1-ab)(1-ab)^{-1}a = 1-b$$

   Pour cela on se permettra d'écrire sans rigueur

   $$(1-ba)^{-1} = 1+ba+(ba)^2+(ba)^3+\cdots = 1+ba+b(ab)a+b(abab)a+\cdots = 1+b(1+ab+(ab)^2+\cdots)a = 1+b($$

   De façon plus rigoureuse, c'est calculer $(X-ba)^{-1}$ *dans* $\mathbb{Z}(<a, b>)[[X]]$.

Exercice 93. Soit I un intervalle réel non réduit à un point. Soit $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$. Une partie J d'un anneau A commutatif est dite idéal de A lorsque J est un groupe additif et

$$\forall\, a \in A\, \forall\, x \in I\ ax \in I.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est un anneau commutatif. Quels en sont les éléments inversibles ?
2. Est-il intègre ? Déterminer un idéal propre infini de l'anneau $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
3. $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \circ)$ est-il muni d'une structure d'anneau ?

13 Semaine du 13 janvier 2020

Exercice 94 (Critère d'Eratosthène)**.** Soit $n$un entier ≥ 2. Montrer que n est premier s'il ne possède aucun diviseur compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

Exercice 95. Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de $7^{(7^7)}$.

Exercice 96. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Montrer que si aucun des entiers relatifs a, b, c n'est multiple de 3 alors l'entier $a^2 + b^2 + c^3$ est multiple de 3.

Exercice 97. Résoudre *s'ils ont vu le théorème chinois*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & \equiv & 2 \quad [140] \\ x & \equiv & -3 \quad [99] \end{array} \right.$$

Exercice 98. Soient a et b premiers entre eux et $c \in \mathbb{Z}$. Montrer que $pgcd(a, bc) = pgcd(a, c)$.

Exercice 99. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 3y & = & 5 \\ 4x + 3y & \equiv & 1 \end{array} \right.$$

dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$.

Exercice 100 (Résidu quadratique modulo p)**.** On recherche les nombres premiers impairs p pour lesquels -1 est résidu quadratique modulo p, c'est-à-dire pour lesquels -1 est un carré dans le corps $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $x \mapsto x^{-1}$ est une involution et déterminer ses points fixes.
2. En regroupant chaque terme avec son image, montrer le théorème de Wilson :
$$(p-1)! \equiv -1 \quad [p].$$
3. À l'aide de $x \mapsto -x^{-1}$ montrer que
$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad [p]$$
si -1 n'est pas résidu quadratique modulo p, et
$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} \quad [p]$$
sinon.
4. Déduire :
   (a) si p est congru à 3 modulo 4, alors -1 n'est pas r.q. mod p
   (b) si p est congru à 1 modulo 4, alors -1 est r.q. mod p
5. Exemples. Déterminer les racines carrées de -1 dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$.

http ://www.bibmath.net/ressources/index.php ?action=affiche&quoi=mathsup/feuillesexo/arithm&ty
http ://www.bibmath.net/ressources/index.php ?action=affiche&quoi=mathsup/colles/arithm&type=f

Exercice 101. Déterminer les entiers relatifs n tels que n−4 divise 3n−17 . *Si n−4 divise 3n−17 , il divise aussi toute combinaison a(n−4)+b(3n−17) , avec a et b des entiers. Tuer le n !*

Exercice 102. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $2^k = a^2 + b^2$, avec k∈ℕ , a,b∈ℕ∗ .

1. Démontrer que si N,a et b sont des entiers tels que $N = a^2 + b^2$ et N est un multiple de 4 , alors a et b sont pairs.
2. En déduire que l'équation $2^{2n} = a^2 + b^2$, n∈ℕ , a,b∈ℕ∗ n'admet pas de solutions. *Prendre $n > 0$ minimal et aboutir à une contradiction.*
3. Démontrer que l'équation $2^{2n+1} = a^2 + b^2$, n∈ℕ , a,b∈ℕ∗ admet une unique solution que l'on précisera.

Exercice 103.

1. Démontrer que si deux entiers relatifs sont premiers entre eux, leur somme et leur produit sont premiers entre eux. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que l'on ne change pas le pgcd de deux entiers en multipliant l'un d'entre eux par un entier premier avec l'autre.

Exercice 104 (Nombres de Mersenne (16e) et de Fermat (17e))**.** 1. Soient a et n deux entiers ≥ 2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier. La réciproque est-elle vraie ? *Prouver M_{11} non premier.* ($M_{11} = 2047 = 23 \times 89$) *Ça prend du temps de calculer des puissances de 2 !*

14 Semaine du 20 janvier 2020

Exercice 105. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(1/x)}{e^{1/x}-1}$ existe ?

Exercice 106. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)+\tan(5x^2)}{\sin(7x)(\tan(2x)+\sin(4x))}$

Exercice 107. Donner un développement limité à l'ordre n indiqué en $x = 0$ des fonctions suivantes

1. $\tan x$ $\quad (n = 5) \quad$ (rép. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$)
2. $e^x \ln(1 + x)$ $\quad (n = 4) \quad$ (rép. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$)
3. $\ln(1 - \sin x)$ $\quad (n = 4) \quad$ (rép. $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$)
4. $\arctan(e^x)$ $\quad (n = 3) \quad$ (rép. $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$)

Exercice 108. Donner un développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 1$ de $(\ln x)/x^2$.

Exercice 109. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}$$

Exercice 110. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + 3h) - 3f(a + h) + 3f(a - h) - f(a - 3h)}{h^3}$$

Exercice 111. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   En déduire la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives.
2. Montrer que $f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to \infty$. En déduire la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice 112 (Règle de l'Hôpital. Nécessite Role.)**.** Soient f et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables sur $]a; b[$ et telles que $\forall x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   On commencera par justifier que le membre de gauche est bien défini et on pourra considérer $f - \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bien choisi. *De telle sorte de pouvoir appliquer Rolle à $f - \lambda g$ et bingo !.*

2. En déduire que si

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$$

   quand $x \to a^+$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ aussi.

3. Application : calculer les limites suivantes.
   (a) $\lim_0 \frac{x-\sin x}{x^3}$
   (b) $\lim_0 \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

Exercice 113.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$, que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que
   (a) $x_n \sim n\pi$ *Celui-ci est « évident ».*
   (b) $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$ *D'abord montrer que $x_n - n\pi$ admet une limite qui est $\pi/2$. On admettera éventuellement que la fonction tangente définit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$... ensuite, écrire $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n = o(1)$ et montrer $\tan(x_n) \sim -1/\varepsilon_n$. En déduire un équivalent pour ε_n.*
3. Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. *Pousser le dévelooppement limité de $\tan(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_n)$. On retrouve les deux premiers termes et on obtient le troisième.*
4. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 114.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de (x_n).
3. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
4. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. *Réinjecter $x_n = \frac{1}{n} + \varepsilon_n$ où $n\varepsilon_n \to 0$. Tout multiplier par n^3, faire apparaître $n\varepsilon_n$ quasiment partout et conclure $n^4\varepsilon_n \to -1$.*

Exercice 115 (Nécessite théorème d'inversion locale)**.** Soit f l'application définie par $f(x) = xe^{x^2}$ pour tout x réel.

1. Justifier l'**existence** de réels a_0, a_1 et a_2 tels que $f^{-1}(y) = a_0 y + a_1 y^3 + a_2 y^5 + o(y^5)$ au voisinage de $y = 0$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

Exercice 116.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient f et g deux fonctions sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{x_0}(f-g) = 0 \Longleftrightarrow e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \quad x \to x_0$$
2. Dans chacun des cas suivants, montrer que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Que peut-on dire de $e^{f(x)}$ et $e^{g(x)}$?

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ et $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$
(b) $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x + 2$
(c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$

3. Peut-on composer les équivalent ? ($f \sim g$ implique-t-il $h \circ f \sim h \circ g$?

Exercice 117. Développement asymptotique (trois premiers termes) de $x \mapsto \frac{e^x\sqrt{x}}{e^x+\ln(x)}$ en $+\infty$.

$$\frac{e^x\sqrt{x}}{e^x + \ln(x)} = 1 + \sqrt{x}e^{-x} - \ln(x)e^{-x} + o(\ln(x)e^{-x})$$

(nécessite croissance comparée).

Exercice 118.

1. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!.$$
2. Déterminer trois réels tels que $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$ et
$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + O(\frac{1}{n^3}).$$

Exercice 119. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \sim v_n$. On pose
$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$
et on suppose de plus que $V_n \to \infty$. Démontrer que $U_n \sim V_n$.

Exercice 120. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme. On note p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de P en $+\infty$. Déterminer un équivalent simple de P en 0.

15 Semaine du 27 janvier 2020

Les grands théorèmes de continuité seront l'objet de la semaine suivante. Pour cette semaine, l'objectif est double : continuer avec les DLs et équivalents pour calculer des limites, et faire de l'epsilonnage.

Exercice 121. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs telles que $u_{n+1}/u_n \leq v_{n+1}/v_n$. Montrer que $u_n = O(v_n)$.

Exercice 122 (nécessite la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)**.**

1. Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2. Déterminer toutes les fonctions continues en un point vérifiant la propriété précédente.
3. Comment peut-on procéder si l'on suppose f dérivable ?

Exercice 123 (nécessite la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)**.** Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x+1) = f(x).$$

Exercice 124 (Détermination de fonctions)**.** Pouvez-vous trouver ?

1. une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point telle que $|f|$ soit continue en tout point *ça doit se faire avec $\mathbb{Q}$ ($x \mapsto x$ ou $-x$ selon rationnel ou non)*
2. une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective et discontinue en tout point *f(x)=x si x app. a $\mathbb{Q}\backslash\{1/2,1\}$ f(x)=1-x si x app. a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et f(1/2)=1 f(1)=1/2.*
3. une fonction f périodique non-constante n'ademettant pas de plus petite période strictement positive *les périodes de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ sont les rationnels, qui forment un sous-groupe dense....*
4. une fonction f périodique non bornée *Par exemple, on peut poser $f(x) = \sum n 1_{[2^{-n}, 2^{\{-n+1\}}]}$ et définir f(0)=1, puis étendre par périodicité. Ou faire un dessin.*
5. une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ qui n'atteint ses bornes sur aucun segment
6. une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ et admettant une limite en $+\infty$ *c'est forcément quelque chose de constant (?)*
7. une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envoyant $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et inversement ?
8. une fonction croissante discontinue en tout point irrationnel ?
9. une fonction croissante discontinue en tout point de $\mathbb{N}$? *partie entière*
10. une fonction discontinue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$? *Regarder $x \in \mathbb{Q} \mapsto x$, $x \notin \mathbb{Q} \mapsto -x$.*
11. une fonction injective sur $\mathbb{R}$ et non strictement monontone sur $\mathbb{R}$? *la même*
12. Construire une fonction croissante sur [0,1] ayant une infinité de points de discontinuité
13. Construire une fonction qui n'est continue nulle part.

Exercice 125. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante. Montrer que f est continue.

Exercice 126. Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 127. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x+1) - f(x) \to \ell$. Montrer que $f(x)/x \to \ell$. *Se ramener à $\ell = 0$.*

Exercice 128. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues.

Exercice 129. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0, et vérifiant f(2x)=f(x) pour tout réel x . Montrer que f est constante. Comment généraliser ce résultat si f vérifie f(ax+b)=f(x) pour des réels a et b donnés avec |a|≠1 ?

Soit $x \in \mathbb{R}$ et (x_n) la suite définie par $x_n = x/2^n$. Alors $x_n = 2x_{n+1}$, et donc on a$f(x_n) = f(x_{n+1})$. Ainsi, on obtient que pour tout entier n , on a f(x_ n)=f(x) . Or, la suite (xn) tend vers 0, et f est continue en 0. On en déduit que f(xn)→f(0) , et donc que f(x)=f(0) . Comme x est arbitraire, f est bien constante égale à f(0) . Si f vérifie la relation $f(ax + b) = f(x)$, alors soit ℓ la solution de $al + b = l$, soit l=b1−a (on a a≠1). Si f est continue en l , alors f va être constante. En effet, la transformation x↦ax+b est une homothétie de centre l et de rapport a . On peut faire le même travail avec cette homothétie qu'avec l'homothétie x↦2x .

16 Semaine du 03 février 2020

Cf semaine précédente.

Exercice 130.

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que f a au moins un point fixe.
2. Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues et telles que
$$f \circ g = g \circ f.$$
Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ telle que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 131.

1. Donner par un dessin l'interprétation géométrique de « f fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet un point fixe » .
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel qu'il existe a vérifiant $f \circ f(a) = a$. La fonction f a-t-elle des points fixes ? *Indication.*
   (a) *Faire un dessin.*
   (b) *Ensuite, séparer les cas : $f(a) = a$, $a < f(a)$ et $f(a) < a$.*
   (c) *Étudier comme d'habitude $g = f - id$.*

Exercice 132. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$. Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 133. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq g(x) + \delta$ pour tout $x \in [a, b]$. *Indication.$f - g$*

2. On suppose de plus $g > 0$ sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que $f(x) \geq kg(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. *Indication.* f/g.

Exercice 134 (plus difficile)**.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $|f|$ admet une limite en $+\infty$. Prouver que f admet également une limite en $+\infty$.

Exercice 135. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue admettant une limite (finie) en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

17 Semaine du 10 février 2020

Exercice 136. On se donne un couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Quel est le reste de la division de $A \in \mathbb{K}[X]$ par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 137. Montrer que quel que soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ le polynôme X^2+X+1 divise le polynôme $X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$.

Exercice 138. Effectuer la division euclidienne du polynôme $A = 2X^3+5X^2+X - 2$ par $X + 1$ puis trouver les racines de A. Résoudre ensuite l'équation

$$2\sin^3\theta + 5\sin^2\theta + \sin\theta - 2 = 0.$$

Exercice 139. Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non-constant. On suppose que $A \circ P \mid B \circ P$. Démontrer que $A \mid B$.

Exercice 140. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est -il unique ? Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$.

Exercice 141.

1. Soit
$$P = a_nX^n + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$$
tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ exprimée sous forme irréductible. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Factoriser
$$P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5.$$
3. Le polynôme
$$P = X^3 + 3X - 1$$
est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 142 (CCP)**.** Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ distincts. Montrer que $P = (X - a_1)...(X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynômes à coefficients entiers et non constants $QT \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P = QT$.

Exercice 143 (École polytechnique, 2019)**.** Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et telles que P'' divise P.

1. Montrer que P est à racines simples.
2. Montrer que les racines de P sont alignées.

Exercice 144 (École polytechnique, 2019). Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme réel de degré $n \geq 2$ scindé sur $\mathbb{R}$. Pour $1 \leq k \leq n-1$, déterminer le signe de $a_{k-1}a_{k+1} - a_k^2$. *Dur donné comme ça ; c'est l'aboutissement d'un exercice plus bas.*

Exercice 145 (Mines-ponts, 2019). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geq 0$. *Soit regarder $Q - Q'$, soit utiliser Taylor, soit étudier le minimum de Q (qui en admet un par degré...)...*

Exercice 146 (Mines-ponts, 2019). Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. *(Ensuite de même avec $F \in \mathbb{C}(X)$.)*

Exercice 147 (Mines-ponts, 2019). Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ et E une partie finie de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $|P^{-1}(E)| \leq n|E|$.
2. Quel est le degré de $P \wedge P'$?
3. Montrer que $|P^{-1}(E)| \geq (|E| - 1)n + 1$.

Exercice 148 (Mines-ponts, 2019). Soient $a_1 < ... < a_n$ des entiers relatifs et $P = 1 + \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^2$. Montrer que P est un irréductible de $\mathbb{Z}[X]$.

18 Semaine du 17 février 2020

Exercice 149.

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{P'}{P}$ où P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. *Factoriser $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ et dériver pour trouver la partie polaire relative à la racine a.*
2. En déduire les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$. *Utiliser l'unicité de la décomposition !*

Exercice 150.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$$
On obtient $F(X) = \frac{1/2}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1/2}{X+2}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) suivante :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$
On trouve $1/4$.

Exercice 151 (Facile, degré)**.** Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationelle F telle que $F^2 = X$. Autrement dit, X n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 152. Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux. Déterminer les racines et pôles de $(X^p - 1)/(X^q - 1)$ en précisant leur ordre. *Indication : on connait les racines des deux polynômes. Chercher les racines communes en se rappelant que p et q sont premiers entre eux...*

Exercice 153. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{X^2+1}{X(X^2-1)}$ *On trouve* $1/(X-1) - 1/X + 1/(X+1)$ *(?)*
2. $\frac{2X}{X^2+1}$ *C'est clairement décomposé sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$ *on voit bien que c'est* $\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}$.
3. $\frac{1}{X^4+X^2+1}$ *On trouve que les pôles sont les* $\pm\alpha, \pm\overline{\alpha}$ *où* $\alpha = e^{i\pi/3}$ *et on peut utiliser le fait que la fraction est réelle et paire pour trouver des relations faciles avec les coefficients. On a alors*
$$R = \frac{a}{X-\alpha} + \frac{\overline{a}}{X-\overline{\alpha}} - \frac{a}{X+\alpha} - \frac{\overline{a}}{X+\overline{\alpha}}$$
et il n'y a plus qu'à trouver a, par le cours par exemple : c'est $1/(X^4 + X^2 + 1)'(\alpha)$.
4. $\frac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}$
5. $\frac{X^3+1}{(X-1)^4}$

Exercice 154 (ENS)**.**

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples $(x_1, ..., x_n)$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$
Il faut calculer ce que vaut $P'(x_k)$ *et* $P''(x_k)$ *pour tout k, puis sommer, simplifier et se rendre compte que l'on somme des termes deux à deux opposés !*
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines $(x_1, ..., x_n)$ de multiplicité $k_1, ..., k_n$. Décomposer P'/P et en déduire les polynômes divisibles par leur dérivée. *Il sont de la forme* $\lambda(X-\alpha)^m$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ scindé à racines simples et réelles. Montrer que le polynôme $P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles. *Dériver l'expression* P'/P *en dehors des pôles. On trouve* $P'^2 \geq PP''$. *En déduire que les seules racines possibles sont les racines de* P. *Mais dans ce cas on obtiendrait une racine double...*
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines réelles, de degré n. Montrer que $(n-1)P'^2(x) \geq nP(x)P''(x)$ pour tout réel x. *Clair avec l'inégalité trouvée précédemment. On ne pouvait pas l'écrire plus haut car le coefficient dominant de P pouvait être complexe.*

19 Semaine du 9 mars 2020

Exercice 155 (Règle de l'Hôpital. Nécessite Role.)**.** Soient f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables sur $]a;b[$ et telles que $\forall\, x \in]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   On commencera par justifier que le membre de gauche est bien défini et on pourra considérer $f - \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$ bien choisi. *De telle sorte de pouvoir appliquer Rolle à $f - \lambda g$ et bingo !.*

2. En déduire que si

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$$

   quand $x \to a^+$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ aussi.

3. Application : calculer les limites suivantes.
   (a) $\lim_0 \frac{x-\sin x}{x^3}$
   (b) $\lim_0 \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

Exercice 156 (Lemme de Rolle "généralisé")**.**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable et telle que

$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} f(a).$$

   Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. *Indication : distinguer les cas, selon s'il existe $x \in]a,+\infty[$ tel que $f(x) = f(a)$ (cas facile) ou non.*

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 157. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M = \sup_{[a,b]} |f''|$.

1. Justifier la définition de M. À quel type de fonction f correspond le cas $M = 0$? Dans la suite on supose que $M > 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$ il existe $c_x \in]a,b[$ tel que

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x).$$

   Indication donnée. L'idée est de construire une fonction avec un zéro de plus. Dans le cas $a < x < b$, on pourra introduire la fonction $g(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ avec A une constante (dépendant de x) telle que $g(x) = 0$. Cette fonction a au moins trois zéros, sa dérivée en a donc deux, et la seconde un.

3. En déduire que $\forall\, x \in [a,b]$,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(x-b)$$

puis que

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{2}(b-a).$$

Indication. Écrire un taux d'acroissement : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x-b}{2} f''(c_x)$ *et majorer.*

Exercice 158.

Exercice 159.

Exercice 160.

Exercice 161.

Exercice 162.

Exercice 163.

Exercice 164.

Exercice 165.

Exercice 166.

Exercice 167.

Exercice 168.

Exercice 169.

Exercice 170.

Exercice 171.

Exercice 172.

Exercice 173.

Exercice 174.

Exercice 175.

Exercice 176.

Exercice 177.

Exercice 178.

Exercice 179.

Exercice 180.

Exercice 181.

Exercice 182.

Exercice 183.

Exercice 184.

Exercice 185.

Exercice 186.

Exercice 187.

Exercice 188.

Exercice 189.

Exercice 190.

Exercice 191.

Exercice 192.

Exercice 193.

Exercice 194.

Exercice 195.

Exercice 196.

Exercice 197.

Exercice 198.

Exercice 199.

Exercice 200.

Exercice 201.

Exercice 202.

Exercice 203.

Exercice 204.

Exercice 205.

Exercice 206.

Exercice 207.

Exercice 208.

Exercice 209.

Exercice 210.

Exercice 211.

Exercice 212.

Exercice 213.