Questions de cours en colle pour les MPSI1 du lycée Champollion, Grenoble

Loïs Faisant

Année 2019-2020

1 Semaine du 23 septembre 2019

1.1 Logique

1. Démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les deux formules
$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, |x+y| \leq |x| + |y|$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, ||x| - |y|| \leq |x-y|.$$
[Utilise $|x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq (|x|^2 + |y|^2)$.] Cas d'égalité ?
2. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est par rationnel.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction (quelconque). Montrer qu'il existe un et un seul couple de fonctions (g,h) tel que $f = g+h$ avec g paire et h impaire.
4. Démontrer la proposition suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}\, (x = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\, |x| \leq \varepsilon)).$$
En déduire
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\, (a = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\, |a-b| \leq \varepsilon)).$$
5. Cours de logique.
   (a) Quelle est la négation de $(P) \Rightarrow (Q)$? (Utiliser $(A \Rightarrow B) = (\text{non}A \text{ ou } B)$ par défintion).
   (b) Montrer qu'une affirmation $(P) \Rightarrow (Q)$ et sa contraposée sont simultanément vraies ou fausses. (Elles ont la même négation...)

1.2 Nombres complexes

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire les deux formules
$$\forall z, z' \in \mathbb{C}\, |z+z'| \leq |z| + |z'|$$
$$\forall z, z' \in \mathbb{R}\, ||z| - |z'|| \leq |z-z'|.$$
Cas d'égalité ?

2. Énoncer et démontrer les formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$

pour tout réel θ.

3. Énoncer et démontrer la formule de Moivre

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

pour tout entier naturel n et réel θ.

2 Semaine du 30 septembre 2019

2.1 Calculs algébriques

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = ?.$$

2. Donner la définition d'un coefficient binomial. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal. [Par récurrence à partir de la définition factorielle, pas de logique encore.]

3 Semaine du 7 octobre 2019

1. On se donne un système linéaire $AX = B$. Montrer que si ce système admet une solution, alors il l'ensemble des solutions s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions du système homogène.
2. Donner la définition d'un coefficient binomial. Montrer que c'est symétrique. Énoncer et démontrer la formule du triangle de Pascal [Par récurrence à partir de la définition factorielle, pas de logique encore.]
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique (réelle ou complexe) de raison q. Démontrer la formule de la somme géométrique.

4 Semaine du 14 octobre 2019

1. Définition et graphes de arccos *et* arcsin.
2. Définir $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto x^b$ en précisant pour quels x, a et b.
3. Équation de la tangente à la courbe de $f : I \to \mathbb{R}$ en un $x_0 \in I$ où f est dérivable. Comment savoir autour de x_0 si la courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente ?

5 Semaine du 4 novembre 2019

5.1 Étude de fonctions, fonctions usuelles

Cf semaine passée.

5.2 Calculs de primitives

1. Donner une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ pour a et b des réels non nuls.
2. Énoncer la formule d'intégration par parties.
3. Donner une primitive de $\frac{1}{x^2+x+1}$.

5.3 Équations différentielles linéaires

1. Donner la méthode de résolution générale d'une équation linéaire homogène d'ordre 1, puis non homogène.

6 Semaine du 11 novembre 2019

6.1 Équations différentielles linéaires

Reprise du programme précédent.

1. Principe de superposition : expliquer.
2. Donner la solution d'une équation homogène du second ordre à coefficients constants dans $\mathbb{C}$.
3. Énoncer (sans démonstrer) le problème de Cauchy en ordre 2. Faire le parallèle avec la résolution générale des équations linéaires : que se passe-t-il ?

Dans le programme :

1. Solution particulière pour le second ordre à coefficients constants sous forme polynôme-exponentielle ou polynôme-fonction trigonométrique.
2. Problème de Cauchy.
3. Conséquence graphique du théorème de Cauchy.

6.2 Ensembles

1. Cardinal de l'ensemble des parties de E ensemble fini. Démonstration ?

7 Semaine du 18 novembre 2019

7.1 Ensembles et applications

1. Soit $f : X \to Y$ une application entre deux ensembles X et Y. Soient A et B des parties de X. Donner la définition quantifiée de $f(A)$ et montrer

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

   puis donner un exemple simple où la dernière inclusion est stricte.

2. Même notations excepté A et B des parties de Y. Donner la définition quantifiée de $f^{-1}(A)$ et montrer

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

3. Montrer l'une des propositions suivantes
   (a) f et g surjectives implique $f \circ g$ surjective
   (b) f et $g$bijectives implique $f \circ g$ bijective
   (c) $f \circ g$ injective implique g injective
   (d) $f \circ g$ surjective implique f surjective
4. Montrer que si f et g sont bijectives, alors $f \circ g$ est bijective et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
5. Fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de E, fonction indicatrice de $\overline{A}$, de $A \cap B$, de $A \cup B$. Exprimer $\mathbf{1}_{x(x-1)>0}$ en fonction de $\mathbf{1}_{x>0}$ et $\mathbf{1}_{x>1}$, et dessiner.

7.2 Relations binaires

1. Définir relation d'équivalence sur un ensemble E et classe d'équivalence. Montrer qu'à chaque relation d'équivalence sur un ensemble E correspond une partition de E, et réciproquement.

8 Semaine du 25 novembre 2019

1. Montrer que si f et g sont croissantes d'un ensemble ordonné E dans $\mathbb{R}$, alors $f + g$ est croissante de E dans $\mathbb{R}$.
2. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Prouver qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme $]a, b[$ ou $]a, b]$ ou ... etc.

9 Semaine du 02 décembre 2019

1. Montrer que tout suite convergente est bornée.
2. Montrer que si $u_n \to \ell > 0$ alors $u_n > 0$ pour $n \geq n_0$.

3. Montrer que tout suite croissante majorée converge. Que dire si la suite n'est pas majorée ? (Application de la borne sup). Comment prouver en deux secondes le cas d'une suite décroissante (minorée) ?
4. Démontrer le théorème des suites adjacentes.
5. Caractérisation séquentielle de la densité d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

10 Semaine du 09 décembre 2019

1. Montrer qu'une suite réelle (u_n) converge vers ℓ ssi ses sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ simultanément. Que dire d'une suite complexe ?
2. Donner les grandes lignes de la preuve de BW. « Une suite dans un compact, ça colle ... ! »
3. Soit (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue. Que dire si (u_n) converge ? Et si f est croissante ?

11 Semaine du 16 décembre 2019

1. Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?
2. Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$?
3. Énoncer et démontrer le théorème de Lagrange.
4. Montrer que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose de façon unique (à l'ordre des facteurs près) en un produit de cycles à supports disjoints.

12 Semaine du 06 janvier 2020

Reprise du programme précédent.

1. Définir $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et montrer que c'est un corps.
2. Montrer qu'un corps est intègre.
3. Comment factorise-t-on $a^n - b^n$ dans un anneau ?
4. Que dire des inversibles d'un anneau ?

13 Semaine du 13 janvier 2020

1. Montrer que dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la classe de k est inversible ssi k est premier avec n.
2. Décrire les idéaux de $\mathbb{Z}$.
3. Démontrer le petit théorème de Fermat : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad n^p \equiv n \ [p]$.
4. Définir la notion de nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombre premier.

5. Soient deux entier $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. *Pour l'existence, considérer par exemple la partie des multiples de b plus petits que $a \in \mathbb{N}$. Se débrouiller ensuite si $a < 0$.*
6. Montrer qu'il existe u, v tels que $au + bv = a \wedge b$.

14 Semaine du 20 janvier 2020

1. Donner la définition de $u_n = o(v_n)$ et montrer que à $(v_n) \in \mathbb{R}^N$ fixée, $\{(u_n) \in \mathbb{R}^N \mid u_n = o(v_n)\}$ est stable par combinaison linéaire.
2. Montrer que si
$$\sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + o(h^n)$$
alors $a_k = b_k$ pour tout k.
3. Que dire du $DL_n(0)$ d'une fonction paire ?
4. Énoncer (sans démonstration) la formule de Taylor-Young. Développement limité de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ en 0.
5. Développement limité de $\ln(1 + x)$ (ln(1-x)) ? Preuve ?

15 Semaine du 27 janvier 2020

Reprise du programme précédent. Plus continuité des fonctions d'une variable réelle à valeur réelle (limites, ϵ...)

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle réel non vide. Soit $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que $f(x)$ tend vers ℓ_1 lorsque x tend vers x_0. Montrer que si $f(x)$ tend vers ℓ_2 lorsque x tend vers x_0, alors $\ell_2 = \ell_1$.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle réel non vide. Soit $x_0 \in \overline{I}$. Si $f(x) \geq 0$ pour tout x et si $f(x)$ converge vers ℓ, alors $\ell \geq 0$.
3. Montrer que si f et g admettent une limite en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ admet une limite en x_0. Montrer que si $x \to \infty$, et que f admet une limite non nule en $+\infty$, alors $1/f(x) \to ...$.
4. Montrer que si f admet une limite en a valant α et que g admet une limite en α valant ℓ alors $g \circ f$ (quand tout ceci a du sens, préciser !) admet une limite en a valant ℓ.
5. Théorème des gendarmes en un point réel.
6. Si $f(x)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0. En particulier, si f converge vers $\ell \in]a, b[$ alors $f(x) \in]a, b[$ pour x proche de x_0. Et si $f(x)$ converge vers $\ell > 0$ alors $f(x) \geq \ell/2 > 0$ pour x proche de x_0.

7. Théorème de la limite monotone : existence de limites à droite et à gauche.

Les grands théorèmes de continuité seront l'objet de la semaine suivante. Pour cette semaine, l'objectif est double : continuer avec les DLs et équivalents pour calculer des limites, et faire de l'epsilonnage.

16 Semaine du 3 février 2020

1. Théorème des bornes atteintes. (On utilise BW.)
2. Théorème de la limite monotone : existence de limites à droite et à gauche. (Facile en étudiant les bornes de l'image.)
3. Théorème de limite séquentielle. (Par l'absurde pour le sens réciproque. Preuve plus technique.)
4. Soient deux intervalles I et J. Soit une application f continue sur I telle que $f(I) \subset J$ et g une application continue sur J. Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I. (Plus facile.)

17 Semaine du 10 février 2020

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, montrer
   (a) $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
   (b) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$
2. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) tel que
$$A = BQ + R$$
avec $0 \leq \deg R < \deg B$. *Par récurrence sur le degré de A.*
3. Soit P un polynôme non nul. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et des polynômes $P_1, ..., P_m$unitaires et irréductibles tels que
$$P = \alpha \prod_{k=1}^{m} P_k$$
uniques à l'ordre près.

18 Semaine du 17 février 2020

1. On se donne $R = P/Q$ une fraction rationnelle. Calculer le coefficient de $1/(X - \lambda)$ dans la DES de R lorsque λ est un pôle simple.
2. Interpolation de Lagrange : polynômes interpolateurs élémentaires, existence et unicité dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ d'un polynôme interpolant en n points, ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ interpolant en ces n points

3. Dérivée d'une fonction réciproque, dessin de sa tangente.
4. Décomposition de $\frac{2X}{X^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
5. Dérivation en un point / équivalence avec l'admission d'un $DL_1(x_0)$.

19 Semaine du 9 mars 2020

1. Théorème de la limite monotone : existence de limites à droite et à gauche. (Facile en étudiant les bornes de l'image.)
2. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
3. théorème de la limite de la dérivée
4. dérivation des fonctions $I \to \mathbb{C}$

20 Semaine du 16 mars 2020

Seulement des exercices.

21 Semaine du 23 mars 2020

1. Soient E un espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors
$$E = \ker(p - \mathrm{id}_E) \oplus \ker p$$
et p est le projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \ker p$.
2. On suppose que E possède une base. Montrer qu'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est uniquement déterminée par les images des éléments de la base.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E ssi $E + F = E$ et $E \cap F = \{0\}$.

22 Semaine du 30 mars 2020

1. Montrer le théorème de Heine : une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue.
2. Montrer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale d'une fonction réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$, cela ne change rien).
3. Montrer qu'une fonction définie sur un intervalle quelconque, et qui est lipschitzienne, est uniformément continue.