

---

**AUTOUR D'UNE CONJECTURE DE MANIN GÉOMÉTRIQUE  
(D'APRÈS B. LEHMANN, S. TANIMOTO ET Y. TSCHINKEL)**

**MÉMOIRE DE MASTER 2**

Loïs FAISANT

Encadrant : Emmanuel PEYRE

---

**Table des matières**

Introduction.....	2
<b>Partie I. Diviseurs, courbes et modèle minimal.....</b>	<b>4</b>
1. Cônes de diviseurs.....	4
2. Courbes rationnelles sur les variétés.....	9
3. Quelques outils du Programme du Modèle Minimal.....	14
<b>Partie II. Étude des composantes de <math>\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)</math>.....</b>	<b>19</b>
4. Dimension des composantes de $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$ .....	19
5. Nombre de composantes : conjecture de Batyrev .....	28
6. Conjecture de Manin géométrique.....	38
<b>Partie III. Volumes de Fano de rang 1 et index 2.....</b>	<b>42</b>
7. Classification, ensemble exceptionnel et composantes.....	42
8. Droites et coniques.....	43
9. Courbes de degré quelconque.....	47
Références.....	52

## Introduction

L'appellation «conjecture de Manin» désigne initialement un ensemble de prédictions faites par V. Batyrev et Y. Manin dans [BM90] concernant le comportement asymptotique du nombre de points rationnels de hauteur bornée sur une variété définie sur un corps de nombres. La terminologie «conjecture de Manin géométrique» désigne alors des analogues pour les courbes rationnelles des conjectures énoncées dans le cadre arithmétique. L'analogie naturelle avec les corps de fonctions de dimension un, associée à des techniques issues du Programme du Modèle Minimal [KM98] a notamment permis de comprendre des phénomènes d'accumulation de courbes rationnelles.

Plus précisément, étant donnée  $\varphi$  une courbe rationnelle dans une variété projective et lisse  $X$ , c'est-à-dire un morphisme depuis la droite projective  $\mathbf{P}^1$  vers  $X$ , il est naturel de lui associer une classe

$$\underline{\deg} \varphi : \begin{cases} \text{NS}(X) & \longrightarrow \mathbf{Z} \\ L & \longmapsto \deg(\varphi^*(L)) \end{cases}$$

dans le dual du groupe de Néron-Severi (*cf.* Définition 1.3.1), appelée multidegré. Étant donnée une classe  $\alpha$  dans le dual  $\text{NS}(X)^\vee$ , on sait depuis A. Grothendieck que les morphismes  $\varphi$  de multidegré  $\alpha$  sont paramétrés par une variété quasi-projective  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  [Deb01, Chapitre 2]. Si  $K_X$  est un diviseur canonique de  $X$ , par un argument de déformation, la dimension d'une composante de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  est minorée par  $-K_X \cdot \alpha + \dim(X)$  et cette dernière quantité est la dimension dite *attendue*. Deux problématiques sont soulevées. La première est l'existence de composantes de dimension trop grande, c'est-à-dire strictement supérieure à celle attendue. Les morphismes  $\varphi$  qui se factorisent au travers de morphismes finis non triviaux ont des chances de fournir des composantes de dimension trop grande. L'exemple le plus simple d'une telle factorisation est l'inclusion d'une sous-variété stricte et on parle alors de sous-variété accumulatrice (pour un fibré en droites donné). Dans le cas des variétés de Fano, les travaux de B. Lehmann, S. Tanimoto et Y. Tschinkel [LT19; LTT18] ont permis de montrer que l'image de tels morphismes est contenue dans un fermé strict de  $X$ . Il s'agit du premier résultat important présenté dans ce mémoire; nous en énonçons ci-dessous un cas particulier, *cf.* Théorème 4.1.1.

**Théorème.** — *Soit  $X$  une variété de Fano. Il existe un fermé strict de  $X$  contenant toute sous-variété accumulatrice pour le fibré anticanonique.*

Il est alors possible d'en déduire que toute composante non vide dont l'image n'est pas incluse dans le fermé strict  $V$  du théorème ci-dessus est une *bonne* composante au sens suivant. Il s'agit du deuxième résultat important de ce mémoire, *cf.* Théorème 4.2.5.

**Théorème.** — *Soit  $X$  une variété de Fano et  $V$  le fermé strict associé. Pour toute classe  $\alpha$  de  $\text{NS}(X)^\vee$ , toute composante de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$ , dont l'image dans  $X$  n'est pas incluse dans  $V$ , est de la dimension attendue et paramètre une famille dominante de courbes rationnelles.*

La seconde problématique concerne le nombre de composantes et fait l'objet d'une conjecture de Batyrev : étant donné un fibré  $L$  nef et gros, le nombre de composantes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  serait borné par une fonction polynomiale du  $L$ -degré de  $\alpha$ . Cette conjecture peut être précisée : le degré attendu du polynôme s'exprimerait en termes de contraction de faces, *cf.* Conjecture 5.1.3. D'une part, l'étude de cette conjecture est l'occasion de développer des techniques de comptage des composantes de l'espace des courbes stables de genre zéro, techniques qui se révéleront utiles par la suite. Les bonnes composantes sont alors celles paramétrant des chaînes de courbes libres. D'autre part, *modulo* une hypothèse forte sur le degré des composantes des courbes stables considérées, on aboutit à une majoration polynomiale du nombre de composantes, *cf.* Théorème 5.4.1.

Ces deux problématiques conduisent alors d'abord à discerner par une définition claire les bonnes composantes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ , dites *composantes de Manin*, ensuite à formuler une conjecture de Manin géométrique, cf. Conjecture 6.3.1. Celle-ci est vérifiée dans un certains nombre de cas connus [Tho98; KP01; Bou16; Tes06].

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de ces volumes de Fano. On y donne une description complète des composantes de l'espace  $\overline{M}_{0,0}(X, d)$  des applications stables de degré  $d \geq 2$  : il y a exactement deux composantes, dont on caractérise un élément général, cf. Théorème 7.3.1.

**Théorème.** — *Soit  $X$  un volume de Fano de rang de Picard 1, d'index 2 et de degré au moins 2, générale dans son module si de degré 2. Toute courbe de degré au moins 2 est représentée par une et une seule composante de Manin.*

On déduit de cette étude que la Conjecture 6.3.1 est vérifiée dans le cas de certains volumes de Fano, cf. Corollaire 9.3.1.

*Remerciements.* — Je remercie Emmanuel Peyre d'avoir proposé ce sujet et encadré ce mémoire, pour ses explications nombreuses, ses conseils et sa disponibilité dans un contexte contraint de stage à distance.

*Conventions mathématiques.* — Un point général d'un schéma est un point contenu dans le complémentaire d'un fermé de Zariski strict. Un point très général est un point contenu dans le complémentaire d'une union dénombrable de fermés de Zariski stricts.

Tous les schémas considérés dans ce mémoire sont séparés et noethériens. Un schéma propre est un schéma de type fini et propre sur un corps  $\mathbf{k}$ . Une variété désigne un schéma intègre de type fini sur un corps, et toute sous-variété sera supposée fermée.

## PARTIE I. DIVISEURS, COURBES ET MODÈLE MINIMAL

### 1. Cônes de diviseurs

**1.1. Rappels préliminaires.** — On rappelle ici quelques définitions et propriétés essentielles, en renvoyant à [Har77, Chapitre II.6] ou [Deb01, Chapitre 1] pour les démonstrations.

Si  $X$  est un schéma normal, un *diviseur (de Weil)* est une somme formelle finie  $D = \sum_i d_i D_i$  de sous-schémas intègres de  $X$  de codimension 1, où les  $d_i$  sont des entiers relatifs et les  $D_i$  distincts. Un diviseur est dit *principal* s'il est le diviseur d'une fonction rationnelle sur  $X$ . Lorsque on choisit les  $d_i$  parmi les nombres rationnels, on parle de  *$\mathbf{Q}$ -diviseurs*, et  $D$  est dit *effectif* si tous les  $d_i$  sont positifs ou nuls.

De façon duale, un *1-cycle* est une somme formelle finie  $\sum_i a_i C_i$  à coefficients entiers de courbes irréductibles dans  $X$ . Un 1-cycle est dit effectif si tous les  $a_i$  sont positifs.

**Définition 1.1.1.** — Soit  $(X, \mathcal{O})$  un espace annelé. On définit le *groupe de Picard* de  $X$ , noté  $\text{Pic } X$ , comme étant le groupe des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles sur  $X$ , muni de l'opération induite par le produit tensoriel au-dessus de  $\mathcal{O}$ .

Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un schéma, on définit sur  $X$  le *faisceau d'anneaux quotient total* de  $\mathcal{O}_X$  sur chaque ouvert affine  $U$  de  $X$  comme étant le localisé de  $\mathcal{O}_X$  en les éléments qui ne sont pas des diviseurs de zéro. Dans le cas où  $X$  est un schéma intègre, ce faisceau, noté  $\mathcal{K}(X)$  n'est autre que le faisceau constant donné par le corps des fractions de  $X$ , que l'on notera alors  $k(X)$ .

**Définition 1.1.2.** — Un *diviseur de Cartier* sur un schéma  $X$  est une section globale du faisceau  $\mathcal{K}(X)^\times / \mathcal{O}_X^\times$ . Autrement dit, c'est la donnée d'un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  et de sections  $f_i \in H^0(U_i, \mathcal{K}(X)^\times)$  telles que  $f_i / f_j \in H^0(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times)$ . Dans le cas où  $D$  est dans l'image de  $H^0(X, \mathcal{K}(X)^\times) \rightarrow H^0(X, \mathcal{K}(X)^\times / \mathcal{O}_X^\times)$ , on dit que  $D$  est *principal*. L'ensemble des diviseurs de Cartier est naturellement muni d'une structure de groupe. Deux diviseurs de Cartier sont dits *linéairement équivalents* si leur différence est principale.

**Remarque 1.1.3.** — Sur une variété normale, les diviseurs de Cartier peuvent donc être vus comme les diviseurs de Weil localement principaux. On dira qu'un  $\mathbf{Q}$ -diviseur est  *$\mathbf{Q}$ -Cartier* s'il existe un multiple qui est de Cartier, et on dira que  $X$  est  *$\mathbf{Q}$ -factorielle* si tout  $\mathbf{Q}$ -diviseur est  $\mathbf{Q}$ -Cartier.

Si  $X$  est une variété localement factorielle (c'est-à-dire si tous ses anneaux locaux sont factoriels), par exemple une variété lisse, la notion de diviseur de Cartier et celle de diviseur de Weil coïncident [Har77, Proposition II.6.11], c'est-à-dire que le groupe des diviseurs de Weil sur  $X$  est isomorphe à  $H^0(X, \mathcal{K}^\times(X) / \mathcal{O}_X^\times)$ .

Soit  $D$  un diviseur de Cartier sur un schéma  $X$ , donné par  $(U_i, f_i)$  comme dans la définition 1.1.2. On associe à  $D$  un faisceau inversible  $\mathcal{O}_X(D)$  en considérant le sous- $\mathcal{O}_X$ -module de  $\mathcal{K}(X)$  généré par  $1/f_i$  sur  $U_i$ . Cette définition est licite puisque  $f_i / f_j$  est inversible sur  $U_i \cap U_j$  et  $1/f_i$  et  $1/f_j$  engendrent le même  $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ -module. Le lien précis entre diviseurs de Cartier et faisceaux inversibles est résumé par la proposition suivante, pour laquelle on renvoie à [Har77, Propositions II.6.13, II.6.15 & Corollaire II.6.14].

**Proposition 1.1.4.** — Soit  $X$  un schéma. L'application  $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$  induit un morphisme injectif du groupe des classes de diviseurs de Cartier pour l'équivalence linéaire vers  $\text{Pic } X$ . Si de plus  $X$  est intègre, ce morphisme est également surjectif.

*Preuve du second point.* — En effet, dans ce cas  $\mathcal{K}(X)$  est constant et pour tout faisceau  $\mathcal{L}$  sur  $X$ , on constate par irréductibilité de  $X$  que  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}(X) \cong K(X)$ . Alors  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}(X)$  réalise  $\mathcal{L}$  comme sous-faisceau de  $\mathcal{K}(X)$ .  $\square$

*Formule d'adjonction.* — Étant donnée  $Y$  une sous-variété lisse d'une variété lisse  $X$ , la formule d'adjonction permet de calculer facilement le fibré canonique de  $Y$  connaissant celui de  $X$ .

**Proposition 1.1.5.** — *Soit  $X$  une variété lisse et  $Y$  une sous-variété de  $X$ , également lisse. Soient  $i : Y \rightarrow X$  l'inclusion de  $Y$  dans  $X$  et  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux  $\ker(\mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y)$ . Alors le faisceau anticanonique de  $Y$  est donné par*

$$K_Y = i^*K_X \otimes (\det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2))^\vee.$$

*Démonstration.* — La suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow i^*\Omega_X \rightarrow \Omega_Y \rightarrow 0$$

donne en lui appliquant le déterminant  $\det = \wedge^{\dim Y}$  un isomorphisme

$$K_Y \cong i^*K_X \otimes (\det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2))^\vee.$$

$\square$

**Proposition 1.1.6 (Quelques cas particuliers).** — *Soit  $X$  une variété lisse et  $Y$  une sous-variété de  $X$  sur un corps  $\mathbf{k}$  algébriquement clos.*

— *Si  $Y$  est de codimension 1, alors*

$$K_Y = (K_X \otimes \mathcal{O}_X(Y))|_Y = (K_X \otimes \mathcal{O}_X(Y)) \otimes \mathcal{O}_Y.$$

— *Si  $Y$  est une intersection complète dans  $\mathbf{P}^N$  d'hypersurfaces de degrés  $d_1, \dots, d_n$ , alors*

$$K_Y \cong \mathcal{O}_Y(-N - 1 + d_1 + \dots + d_n).$$

*En particulier, si  $Y$  est une hypersurface lisse de degré  $d$  dans  $\mathbf{P}^N$ , alors*

$$K_Y \cong \mathcal{O}_Y(-N - 1 + d).$$

*Démonstration.* — Dans le premier cas,  $Y$  est donnée par un diviseur de Cartier effectif  $D$  et l'idéal associé est  $\mathcal{O}_X(-D)$ . Le faisceau conormal est donc

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \mathcal{O}_D(-D)$$

et son dual est  $\mathcal{O}_D(D) = \mathcal{O}_X(Y)|_Y$  en reprenant les notations de l'énoncé.

Le cas d'une intersection complète de  $n$  hypersurfaces  $Y_1, \dots, Y_n$  se prouve par récurrence sur  $n$ , sachant que  $K_{\mathbf{P}^N} \cong \mathcal{O}(-N - 1)$  et  $K_{Y_i} \cong \mathcal{O}(d_i)|_{Y_i}$ .  $\square$

**1.2. Produits d'intersection.** — Nous présentons ici en quelques mots l'essentiel de ce dont nous avons besoin concernant le produit d'intersection  $D_1 \cdots D_r$  de  $r$  diviseurs de Cartier, où  $r \geq \dim(X)$ . Afin de définir celui-ci, le résultat suivant est essentiel; ensuite la définition en découle naturellement.

**Théorème 1.2.1 ([Deb01, Théorème 1.5]).** — *Soient  $D_1, \dots, D_r$  des diviseurs de Cartier sur un schéma propre  $X$  et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . La fonction*

$$(m_1, \dots, m_r) \in \mathbf{Z}^r \mapsto \chi(X, \mathcal{F}(m_1 D_1 + \dots + m_r D_r))$$

*coïncide sur  $\mathbf{Z}^r$  avec un polynôme à coefficients rationnels dont le degré est majoré par la dimension du support de  $\mathcal{F}$ .*

**Définition 1.2.2.** — Soient  $D_1, \dots, D_r$  des diviseurs de Cartier sur un schéma propre, où  $r \geq \dim(X)$ . Le nombre d'intersection

$$D_1 \cdots D_r$$

est par définition le coefficient du monôme  $m_1 \cdots m_r$  dans le polynôme

$$\chi(X, m_1 D_1 + \dots + m_r D_r).$$

Ce nombre est un entier et l'application  $(D_1, \dots, D_r) \mapsto D_1 \cdots D_r$  vérifie toutes les propriétés attendues que sont la multilinéarité et la symétrie ([Deb01, Proposition 1.8]). De plus, il s'annule pour  $r > \dim(X)$  d'après le théorème précédent. Dans le cas où  $Y$  est un sous-schéma de  $X$  de dimension inférieure ou égale à  $s$ , on définit tout simplement  $D_1 \cdots D_s \cdot Y$  par restriction en considérant le nombre d'intersection  $D_{1|Y} \cdots D_{s|Y}$ .

*Courbes et diviseurs.* — En pratique, les intersections qui vont nous intéresser le plus seront celles d'un diviseur avec une courbe sur  $X$ , et les degrés de la forme  $D^r$ . Dans le premier cas, si  $C$  est une courbe sur  $X$  et  $D$  un diviseur, le Théorème de Riemann-Roch [Har77, Théorème IV.1.3] fournit

$$\chi(C, mD) = m \deg(\mathcal{O}_C(D)) + \chi(C, \mathcal{O}_C)$$

ce qui nous ramène donc à

$$C \cdot D = \deg(\mathcal{O}_C(D)).$$

En particulier, puisque le degré est un invariant birationnel, il est aisé de calculer l'intersection d'un diviseur avec une courbe rationnelle *via* le tiré-en-arrière de celui-ci sur la droite projective.

Soient  $X$  et  $Y$  des variétés,  $\pi : X \rightarrow Y$  un morphisme propre et  $C$  une courbe irréductible sur  $X$ . On définit un 1-cycle sur  $Y$  en posant  $\pi_* C = 0$  si  $\pi$  contracte  $C$ , et  $\pi_* C = \deg(C \xrightarrow{\pi} \pi(C)) \pi(C)$  sinon. Par [Har77, Proposition II.6.9] et le paragraphe précédent, on obtient la formule suivante.

**Proposition 1.2.3 (Formule de projection).** — Soient  $X, Y, \pi$  et  $C$  comme ci-dessus, et  $D$  un diviseur de Cartier sur  $Y$ . Alors

$$\pi^* D \cdot C = D \cdot \pi_* C.$$

**1.3. Groupe de Néron-Severi.** — Étant donné un schéma propre  $X$ , deux diviseurs de Cartier seront dit *numériquement équivalents* s'ils ont même degré sur toute courbe de  $X$ .

**Définition 1.3.1.** — Soit  $X$  un schéma propre. Le quotient du groupe des diviseurs par la relation d'équivalence numérique est appelé *groupe de Néron-Severi* et noté  $N^1(X)_{\mathbf{Z}}$  ou encore  $\text{NS}(X)$ , et le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel associé  $N^1(X) = N^1(X)_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$  : on voit alors  $N^1(X)_{\mathbf{Z}}$  comme un réseau de  $N^1(X)$ . Le groupe abélien  $N^1(X)_{\mathbf{Z}}$  est de rang fini [Kol96, Théorème II.4.5], ce rang est noté  $\rho(X)$  et appelé *nombre* ou *rang de Picard* de  $X$ .

On définit de façon similaire le groupe  $N_1(X)_{\mathbf{Z}}$  des classes numériques de 1-cycles. L'intersection induit un accouplement non-dégénéré

$$N^1(X)_{\mathbf{Z}} \times N_1(X)_{\mathbf{Z}} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

qui s'étend en tensorisant par  $\mathbf{Q}$  ou  $\mathbf{R}$  en un accouplement d'espaces vectoriels. Sur  $\mathbf{R}$ , cet accouplement induit une structure d'espace euclidien et une topologie associée.

*Cône pseudo-effectif, cône nef, et leurs duaux.* — L'ensemble des classes dans  $N^1(X)_{\mathbf{Z}}$  des diviseurs effectifs  $D$  est noté  $\text{Eff}^1(X)_{\mathbf{Z}}$ . Si  $X$  est intègre, il s'agit du cône des fibrés en droites qui ont une section globale. Le cône des diviseurs effectifs est  $\text{Eff}^1(X) = \mathbf{R}_+ \text{Eff}^1(X)_{\mathbf{Z}}$ . La fermeture dans  $N^1(X)$  de  $\text{Eff}^1(X)$  est notée  $\overline{\text{Eff}}^1(X)$  et appelée *cône des diviseurs pseudo-effectifs* sur  $X$ .

Le cône des diviseurs numériquement effectifs sur un schéma propre est noté  $\text{Nef}^1(X)$  et consiste en les diviseurs  $D$  tels que  $D^r \cdot Y \geq 0$  pour tout sous-schéma intégral  $Y$  de dimension  $r$ . Par [Deb01, Théorème 1.26], ceci équivaut à  $D \cdot C \geq 0$  pour toute courbe dans  $X$ , il s'agit donc bien d'une propriété numérique.

Via l'accouplement d'intersection, le dual du cône  $\overline{\text{Eff}}^1(X)$  des diviseurs pseudo-effectifs est le cône  $\overline{\text{Nef}}_1(X)$  engendré par les classes de courbes numériquement effectives. Par [BDPP12], si  $X$  est lisse, il s'agit du cône  $\overline{\text{Mov}}_1(X)$  des courbes mobiles sur  $X$ . Le dual du cône  $\text{Nef}^1(X)$  des diviseurs numériquement effectifs est le cône  $\overline{\text{Eff}}_1(X)$  des cycles pseudo-effectifs sur  $X$ .

**1.4. Diviseurs amples et gros diviseurs.** — Les diviseurs *amples* sont tels que les sections de l'un de leurs multiples définissent un plongement fermé dans un espace projectif. Par le critère de Nakai-Moishezon, ils sont strictement positifs. Cependant, l'amplitude est une notion trop forte pour être un invariant birationnel. Ceci nous amène donc à introduire les *gros* diviseurs. Dans ce qui suit, on précise rapidement ces définitions et propriétés.

*Diviseur ample.* — Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  un schéma. Un faisceau  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{O}_X$ -modules sur  $X$  est dit *engendré par ses sections globales* s'il existe une famille de sections globales telles que leurs images dans chaque germe  $\mathcal{F}_x$ ,  $x \in X$ , l'engendrent en tant que  $\mathcal{O}_x$ -module. Ceci équivaut à requérir que  $\mathcal{F}$  puisse être écrit comme le quotient d'un faisceau librement engendré.

Supposons que  $X$  soit un schéma de type fini sur un corps  $\mathbf{k}$  et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$  tel que  $\Lambda = H^0(X, \mathcal{L})$  soit de dimension finie. Il existe alors une application rationnelle

$$\phi_{\mathcal{L}} : \begin{cases} X & \dashrightarrow & \mathbf{P}(\Lambda^\vee) \\ x & \longmapsto & (s \mapsto s(x)) \end{cases}$$

définie en dehors des points de base de  $\Lambda$ . S'il n'y en pas,  $\phi_{\mathcal{L}}$  définit un morphisme de  $X$  dans  $\mathbf{P}(\Lambda^\vee)$  et  $\mathcal{L} \simeq \phi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\Lambda^\vee)}(1)$ . C'est cette construction qui est utilisée dans la définition ci-dessous.

**Définition 1.4.1 (Diviseur très ample).** — Soit  $X$  un schéma propre. Un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$  est dit *très ample* s'il est donné par la restriction à un hyperplan d'une certaine immersion  $i : X \rightarrow \mathbf{P}^N$  de  $X$  comme sous-ensemble localement fermé, c'est-à-dire  $\mathcal{L} \cong i^*(\mathcal{O}(1))$ . Un diviseur de Cartier  $D$  sur  $X$  est dit *très ample* si le faisceau inversible  $\mathcal{O}_X(D)$  correspondant l'est.

**Définition 1.4.2 (Diviseur ample).** — Soit  $X$  un schéma propre. Un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$  est dit *ample* s'il existe un entier  $m > 0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  soit très ample. Cette définition équivaut à requérir, pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , l'existence d'un entier  $n_0 > 0$  tel que le faisceau  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  soit engendré par ses sections globales pour tout  $n \geq n_0$ . À nouveau, un diviseur de Cartier  $D$  sur  $X$  est dit *ample* si le faisceau inversible  $\mathcal{O}_X(D)$  correspondant l'est.

L'équivalence invoquée dans les définitions précédentes est assurée par le théorème de Cartan-Serre-Grothendieck, cf. [Laz04a, Théorème 1.2.6] ou [Har77, Théorèmes II.5.17 & II.7.6].

*Critères de Nakai-Moishezon et de Kleinman.* — Sur les schémas propres (en particulier, les variétés projectives), on dispose d'une caractérisation numérique de l'amplitude. On se référera à [Deb01, Théorèmes 1.21 & 1.27] pour les preuves des critères suivants.

**Théorème 1.4.3 (Nakai-Moishezon).** — Soient  $X$  un schéma propre et  $D$  un diviseur de Cartier sur  $X$ . Alors  $D$  est ample si et seulement si pour tout sous-schéma intégral  $Y$  de  $X$ , de dimension  $r$ ,

$$D^r \cdot Y > 0.$$

**Théorème 1.4.4 (Kleinman).** — Soient  $X$  une variété projective et  $D$  un diviseur de Cartier sur  $X$ .  $D$  est ample si et seulement si  $D \cdot C > 0$  pour tout cycle  $C$  pseudo-effectif et non-nul.

De plus, pour tout diviseur ample  $H$  et entier  $k$  positif, l'ensemble  $\{C \in \overline{\text{Eff}}_1(X) \mid H \cdot C \leq k\}$  est compact. En particulier, ce dernier contient un nombre fini de classes de courbes irréductibles.

*Gros diviseurs.* — La notion de gros diviseurs est une version birationnelle de l'amplitude.

**Définition 1.4.5 (Gros diviseur).** — Un diviseur  $D$  sur une variété projective  $X$  est dit *gros* s'il existe  $m > 0$  tel que  $mD$  s'écrit dans  $N^1(X)_{\mathbf{Z}}$  comme la somme d'un diviseur ample et d'un diviseur effectif.

**Exemple 1.4.6.** — Soit  $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^2$  l'éclaté du plan projectif en un point,  $H$  le tiré-en-arrière d'une droite de  $\mathbf{P}^2$  ne rencontrant pas le point éclaté, et  $E$  la droite exceptionnelle de  $\pi$ . Alors  $L = H + E$  est gros en tant que somme d'un diviseur ample et d'un diviseur effectif. De plus  $L \cdot E = E^2 = -1$ , donc  $L$  n'est pas nef, *a fortiori* n'est pas ample, et  $E$  est contenue dans le lieu de base de  $L$ . Ce lieu de base est en fait égal à  $E$ .

*Volume.* — Les gros diviseurs sont les diviseurs ayant un volume non-nul au sens suivant.

**Définition 1.4.7.** — Soit  $X$  une variété projective normale de dimension  $n$  et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur  $\mathbf{Q}$ -Cartier. Le volume de  $L$  est défini par

$$\text{vol}(L) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{n!}{m^n} h^0(X, mL).$$

Le volume ne dépend que de la classe numérique. Cette définition s'étend en une fonction continue sur  $\text{NS}(X) \otimes \mathbf{R}$ . Il s'agit d'un invariant birationnel. Le volume d'un diviseur  $L$  est strictement positif si et seulement si  $L$  est gros, et si  $L$  est un diviseur nef, son volume est simplement donné par  $L^n$ . Autrement dit, si  $L$  est nef, alors  $L$  est gros si et seulement si  $L^n > 0$  [Laz04a, Section 2.2.C]

*Intérieur et adhérence de cônes.* —  $\text{NS}(X)$  étant de dimension finie, le produit d'intersection définit une topologie euclidienne sur  $\text{NS}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ . Le cône des diviseurs amples est l'intérieur du cône nef, et le cône nef est la fermeture du cône ample [Laz04a, Théorème 1.4.23]. De façon similaire, le cône des diviseurs gros est l'intérieur du cône pseudo-effectif, et le cône pseudo-effectif est la fermeture du cône des diviseurs gros [Laz04a, Théorème 2.2.26].

*Variétés de Fano.* — Dans la référence principale de ce mémoire [LT19], on considère à plusieurs reprises le cas particulier des variétés de Fano. De façon générale, on dira qu'une variété sur un corps  $\mathbf{k}$  est *de Fano* s'il s'agit d'une variété projective lisse dont le diviseur anticanonique  $-K_X$  est ample. Ces variétés possèdent un certain nombre de propriétés remarquables. Le résultat suivant énonce en particulier qu'une variété de Fano est uniréglée (cf. Définition 2.2.1). On renvoie à [Deb01, Théorème 3.4] pour sa démonstration.

**Théorème 1.4.8.** — Soit  $X$  une variété de Fano, de dimension  $n > 0$ . Par tout point de  $X$  passe une courbe rationnelle de degré au plus  $n + 1$  par rapport à  $-K_X$ .



**Exemple 1.4.9.** — On suppose que le corps de base est algébriquement clos. Une courbe projective est une variété de Fano si et seulement si elle est rationnelle. En effet, si  $g$  est le genre d'une courbe de Fano, le degré de  $-K_X$  est  $2 - 2g$ . Mais  $-K_X$  est ample et donc son degré est strictement positif, ce qui fournit  $g = 0$ , et toute courbe de genre 0 est isomorphe à  $\mathbf{P}^1$ , qui est par ailleurs bien une courbe de Fano. Autrement dit, la seule variété de Fano de dimension un est la droite projective.

**Exemple 1.4.10.** — En dimension 2, toujours sur un corps algébriquement clos, une variété de Fano est appelée *surface de Del Pezzo*. Ces surfaces sont réparties en dix familles :  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  et les éclatés de  $\mathbf{P}^2$  en  $m$  points de position générale, avec  $0 \leq m \leq 8$ . Le cas de l'éclaté en sept points sera d'un intérêt particulier. Dans ce cas, le degré de  $-K_X$  est 2. On peut alors montrer [GH04, Section 7] qu'une surface de Del Pezzo de degré 2 est un revêtement double de  $\mathbf{P}^2$  ramifié le long d'une quartique lisse.

Pour certains résultats présentés dans ce mémoire, il est possible de relâcher légèrement l'hypothèse d'amplitude, d'où la définition suivante : une variété est dite *quasi de Fano* si elle est projective lisse et que son diviseur anticanonique est nef et gros.

## 2. Courbes rationnelles sur les variétés

**2.1. Paramétrisation des morphismes de  $\mathbf{P}^1$  dans  $X$ .** — Grothendieck a montré dans [Gro61] que si  $X$  et  $Y$  sont des variétés sur un corps  $\mathbf{k}$ , avec  $X$  quasi-projective et  $Y$  projective, les morphismes de  $Y$  vers  $X$  sont paramétrés par un schéma  $\text{Mor}(Y, X)$  localement noethérien. Nous n'avons pas besoin ici de présenter cette construction, mais seulement les propriétés qui le caractérisent. Le concept correspondant est celui d'*espace de paramètre* [Deb01, Chapitre 2].

**Théorème 2.1.1.** — Soient  $X$  et  $Y$  des variétés sur un corps  $\mathbf{k}$ , avec  $X$  quasi-projective et  $Y$  projective. Il existe un schéma localement noethérien  $\text{Mor}(Y, X)$  et un morphisme dit universel

$$f^{\text{univ}} : Y \times \text{Mor}(Y, X) \rightarrow X \times \text{Mor}(Y, X)$$

vérifiant les deux propriétés suivantes.

- $f^{\text{univ}} \circ p_{\text{Mor}(Y, X)} = p_{X \times \text{Mor}(Y, X)}$
- $f^{\text{univ}}$  induit une correspondance bijective entre les points de  $\text{Mor}(Y, X)$  et les morphismes  $Y \rightarrow X$  via l'application qui à un point  $t$  de  $\text{Mor}(Y, X)$  associe  $f_t^{\text{univ}} : Y \rightarrow X$ .
- étant donné un schéma  $T$  sur  $\mathbf{k}$ , il y a une correspondance bijective entre les morphismes  $\varphi : T \rightarrow \text{Mor}(Y, X)$  et les  $T$ -morphismes  $f : Y \times T \rightarrow X \times T$ , cette correspondance étant donnée en envoyant  $\varphi$  sur le tiré-en-arrière

$$\begin{aligned} Y \times T &\longrightarrow X \times T \\ (y, t) &\longmapsto (p_X \circ f^{\text{univ}}(y, \varphi(t)), t) \end{aligned}$$

où  $p_X : X \times \text{Mor}(Y, X) \rightarrow X$  est la projection sur  $X$ .

**Remarque 2.1.2.** — Si l'on considère les  $\mathbf{k}$ -points de  $\text{Mor}(Y, X)$ , c'est-à-dire les points  $[g]$  donnés par un morphisme  $\varphi : \text{Spec}(\mathbf{k}) \rightarrow \text{Mor}(Y, X)$ , alors  $f^{\text{univ}}$  est donnée par  $(y, [g]) \mapsto (g(y), [g])$ .

**Définition 2.1.3.** — Étant donné un morphisme  $\varphi : T \rightarrow \text{Mor}(Y, X)$  ou le  $T$ -morphisme correspondant  $f : Y \times T \rightarrow X \times T$ , on appelle *morphisme d'évaluation* le morphisme

$$\begin{aligned} \text{ev} : Y \times T &\longrightarrow X \\ (y, t) &\longmapsto f_t(y) = \varphi(t)(y) \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.4.** — Décrivons en quelques mots le cas pratique des courbes rationnelles

$$f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$$

où  $X$  est une variété projective. Tout d'abord, si  $X = \mathbf{P}^N$ , un tel morphisme peut être donné par

$$f(u, v) = [F_0(u, v) : \dots : F_N(u, v)]$$

où les  $F_i$  sont des polynômes homogènes de même degré  $d$  fixé. Ces polynômes définissent  $f$  (à une constante multiplicative près) si et seulement si ils ne possèdent pas de facteur commun non constant dans  $\mathbf{k}[U, V]$ . Cette condition est ouverte sur leurs coefficients. En effet, sa négation est donnée par l'annulation simultanée, pour un certain degré  $m$ , des  $(m+1)$ -mineurs d'une matrice en les coefficients des  $F_i$ . Autrement dit, les morphismes  $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^N$  sont paramétrés par un ouvert de Zariski de  $\mathbf{P}((\text{Sym}^d \mathbf{k}^2)^{N+1})$ , que l'on note  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^N, d)$ .

Dans le cas d'une variété projective  $X \subset \mathbf{P}^N$  définie par des polynômes homogènes  $G_j$ , les points de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^N, d)$  paramétrant les courbes rationnelles  $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$  de degré  $d$  sont donnés par la condition  $G_j(F_0, \dots, F_N) = 0$ . Ceci définit un sous-schéma  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, d)$  de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^N, d)$ . Finalement on pose  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X) = \sqcup_{d \geq 0} \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, d)$ .

**Définition 2.1.5.** — Étant donné un cycle pseudo-effectif  $\alpha \in \overline{\text{Eff}}_1(X)_{\mathbf{Z}}$ , on note  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  l'ensemble des éléments de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  correspondant à des courbes de classe  $\alpha$ , c'est-à-dire les  $\varphi \in \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  tels que

$$\underline{\text{deg}} \varphi : \begin{cases} N^1(X)_{\mathbf{Z}} & \longrightarrow \mathbf{Z} \\ L & \longmapsto \text{deg}(\varphi^*(L)) \end{cases}$$

soit égal à  $\alpha$  dans  $N_1(X)_{\mathbf{Z}}$ .

Si  $U$  est un ouvert de  $X$ , on désigne par  $\text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  les courbes paramétrées par  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  qui ne se factorisent pas à travers  $X \setminus U$ .

**Définition 2.1.6** ([Deb01, p. 45]). — Soient  $X$  et  $Y$  des variétés sur un corps  $\mathbf{k}$ , avec  $X$  quasi-projective et  $Y$  projective, et  $B \subset Y$  un sous-schéma.

On note  $\text{Mor}(Y, X; g)$  la fibre au-dessus de  $[g]$  du morphisme de restriction

$$\text{Mor}(Y, X) \rightarrow \text{Mor}(B, X)$$

lequel paramètre les morphismes  $f : Y \rightarrow X$  dont la restriction à  $B$  est  $g$ . Dans le cas où  $B$  est réduit à un point  $x$ , on le notera  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, x \mapsto g(x))$ .

**2.2. Variétés uniréglées et courbes libres.** — D'une part, la classe de variété sur laquelle portent les résultats principaux de ce mémoire est celle de variété lisse *uniréglée*. D'autre part, la notion de courbe rationnelle *libre* est intimement liée à la notion de variété uniréglée : en caractéristique nulle, une variété lisse quasiprojective est uniréglée si et seulement si elle possède une courbe libre [Deb01, Corollaire 4.11].

**Définition 2.2.1.** — Soit  $\mathbf{k}$  un corps et  $\mathbf{K}$  une extension algébriquement close de  $\mathbf{k}$ . Une variété  $X$  définie sur  $\mathbf{k}$  et de dimension  $n$  est dite *uniréglée*, s'il existe une variété  $M$  sur  $\mathbf{K}$  de dimension  $n-1$  et une application rationnelle dominante  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^1 \times M \dashrightarrow X_{\mathbf{K}}$ .

En caractéristique nulle, la propriété pour une variété  $X$  d'être uniréglée est une propriété numérique par [MM86, Théorème 1] : elle équivaut à l'existence d'une famille  $(C_t)_{t \in T}$  de courbes irréductibles recouvrant un ouvert dense de  $X$  et vérifiant  $K_X \cdot C_t < 0$ . De là, une variété projective lisse est uniréglée si et seulement si son fibré canonique n'appartient pas au cône pseudoeffectif par [BDPP12].

Donnons-nous  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  non constante. Le faisceau  $f^*T_X$  est localement libre sur  $\mathbf{P}^1$  et peut s'écrire

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_n)$$

avec  $a_1 \geq \dots \geq a_n$  [Har77, Exercice V.2.6].

**Définition 2.2.2 (Courbe rationnelle libre).** — Soit  $X$  une variété sur un corps  $\mathbf{k}$ . Une courbe rationnelle  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  (par définition non constante) est dite *libre* si son image est une courbe contenue dans le lieu lisse de  $X$  et  $f^*T_X$  est engendré par ses sections globales. Ceci équivaut à la condition  $a_n \geq 0$  avec les notations précédentes. On dira que  $f$  est *très libre* si  $a_n > 0$ . On note  $\text{Mor}^{\text{libre}}(\mathbf{P}^1, X)$  le sous-ensemble de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  paramétrant des courbes rationnelles libres.

Plus généralement, on dit qu'une courbe est  $r$ -libre si  $a_n = r \geq 0$ . Dit grossièrement, plus une courbe est libre, c'est-à-dire plus  $r$  est grand, plus elle peut être déformée en conservant un nombre fini de points fixés [Deb01, Proposition 4.8].

Dans le même esprit, on aura besoin plus loin des deux propriétés suivantes, corollaires de [Kol96, Propositions II.3.5 & II.3.10]. Concernant la première, on peut également se référer à [Deb01, Proposition 4.8].

**Proposition 2.2.3 ([Kol96, Corollaire II.3.5.4]).** — Soit  $X$  une variété lisse sur  $\mathbf{k}$ . Alors

- $\text{Mor}^{\text{libre}}(\mathbf{P}^1, X)$  est un ouvert de Zariski de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$
- $\text{ev} : \mathbf{P}^1 \times \text{Mor}^{\text{libre}}(\mathbf{P}^1, X) \rightarrow X$  est lisse.

**Proposition 2.2.4 ([Kol96, Corollaire II.3.10.1]).** — Soit  $X$  une variété lisse et propre sur un corps  $\mathbf{k}$  de caractéristique nulle. Soient  $x$  un point fermé de  $X$  et  $M \subset \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, 0 \mapsto x)$  une composante irréductible telle que  $\mathbf{P}^1 \times M \rightarrow X$  est dominante.

Alors  $f^*T_X$  est ample - c'est-à-dire  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(f^*T_X)}(1)$  est ample - pour  $[f] \in M$  général.

L'usage de cette propriété s'éclaire avec le critère numérique suivant [Laz04b, Proposition 6.1.18] et la remarque attenante.

**Proposition 2.2.5 (Critère de Barton-Kleiman).** — Soit  $X$  une variété lisse et propre sur un corps  $\mathbf{k}$  algébriquement clôt de caractéristique nulle. Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $X$  et  $H \in N^1(X)_{\mathbf{Z}}$  une classe ample. Alors  $E$  est ample si et seulement s'il existe un rationnel strictement positif  $\delta_H > 0$  tel que : pour tout morphisme fini  $\nu : C \rightarrow X$  d'une courbe lisse irréductible  $C$  vers  $X$ , et tout fibré en droite  $L$  quotient de  $\nu^*E$ ,

$$\deg(L) \geq \delta_H \cdot (C \cdot \nu^*H).$$

**Remarque 2.2.6.** — Soit  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  une courbe rationnelle. On suppose que  $f^*T_X$  est ample sur  $\mathbf{P}^1$ . On se donne  $H = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)$ ,  $\delta_H > 0$  le rationnel associé pour le critère de Barton-Kleiman, et  $\nu : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  l'identité. On écrit

$$f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_n)$$

avec  $a_1 \geq \dots \geq a_n$ . Un faisceau en droite quotient de  $f^*T_X$  est l'un des  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$ . Par ailleurs,  $\mathbf{P}^1 \cdot H = 1$ . On a donc  $a_n \geq \delta_H > 0$  :  $f$  est très libre.

### 2.3. Invariants de Fujita

**Définition 2.3.1.** — Soit  $X$  une variété projective lisse et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur gros sur  $X$ . On définit l'invariant de Fujita  $a(X, L)$  comme

$$a(X, L) = \min\{t \in \mathbf{R} \mid t[L] + [K_X] \in \overline{\text{Eff}}^1(X)\}.$$

Autrement dit,  $a(X, L)$  est le plus petit réel tel que  $a(X, L)[L]$  appartienne à une face du translaté par  $-[K_X]$  du cône des diviseurs pseudo-effectifs.

Si  $L$  n'est pas gros, on pose  $a(X, L) = \infty$ .

Si  $X$  et  $X'$  sont deux variétés projectives lisses birationnellement équivalentes via une application  $f$ , alors  $a(X, L) = a(X', f^*L)$  par [HTT15, Proposition 7]. L'invariant  $a$  peut donc être défini pour une variété projective non lisse  $Y$ , en prenant n'importe quelle résolution.

On peut d'ores et déjà donner une borne supérieure de cet invariant, laquelle s'avérera utile dans un exemple.

**Proposition 2.3.2 ([LTT18, Proposition 2.10]).** — Soit  $X$  une variété projective lisse de dimension  $n$  et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Alors  $K_X + (n + 1)L$  est pseudo-effectif.

Par conséquent, si  $L$  est nef et gros, la plus grande valeur possible pour l'invariant  $a$  est  $\dim(X) + 1$ . Si  $L$  et  $-K_X$  sont gros, alors il est clair que  $t[L]$  intersecte  $-K_X + \overline{\text{Eff}}^1(X)$  pour  $t$  strictement positif. En caractéristique nulle, l'invariant  $a$  est strictement positif si et seulement si  $X$  est uniréglée par [BDPP12] et [MM86].

**Exemple 2.3.3.** — Soient  $X$  une variété projective lisse,  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ , et  $C$  une courbe rationnelle sur  $X$  telle que  $L \cdot C > 0$ . Alors

$$a(C, L) = \frac{2}{L \cdot C}.$$

En effet, quitte à prendre une résolution de  $C$ , on peut supposer la courbe lisse et donc isomorphe à  $\mathbf{P}^1$ , de fibré canonique  $\mathcal{O}(-2)$ . On cherche donc le plus petit réel  $x$  tel que  $-2 + xL \cdot C \geq 0$  lequel est bien donné par  $\frac{2}{L \cdot C}$ .

Toujours sous l'hypothèse  $L$  nef et gros, nous verrons plus loin que la condition  $L \cdot C > 0$  équivaut à requérir que  $C$  ne soit pas contenue dans le lieu de base étendu  $\mathbf{B}_+(L)$ , cf. Définition 3.1.4 et Théorème 3.1.5.

**Définition 2.3.4.** — Soit  $X$  une variété projective lisse définie sur un corps algébriquement clos et dont le fibré canonique  $K_X$  n'est pas pseudo-effectif, et  $L$  un gros  $\mathbf{Q}$ -diviseur sur  $X$ . On définit

$$b(X, L)$$

comme étant la codimension de la face de  $\overline{\text{Eff}}^1(X)$  de dimension minimale contenant la classe  $a(X, L)[L] + [K_X]$ .

Par le même argument que pour  $a$ , il s'agit d'un invariant birationnel [HTT15, Proposition 9] et on peut étendre sa définition à une variété projective non lisse *via* une résolution quelconque.

**Définition 2.3.5.** — Si  $X$  est une variété projective lisse et uniréglée, et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur gros sur  $X$ , on appelle *face extrême* et on note  $F(X, L)$  la face de  $\text{Nef}_1(X)$  composée des classes de courbes  $\alpha$  vérifiant

$$(K_X + a(X, L)L) \cdot \alpha = 0.$$

Pour une variété uniréglée, l'invariant  $b(X, L)$  est donc donné par la dimension de la face duale  $F(X, L)$ .

## 2.4. Morphismes minces et contraction de faces

**Définition 2.4.1.** — Un morphisme  $f : Y \rightarrow X$  entre deux variétés est dit *mince* si  $f$  est génériquement fini sur son image tout en n'admettant pas de section rationnelle.

Nous verrons un peu plus loin que connaître le comportement de  $a$  sous un morphisme dominant est essentiel. Cela conduit à la définition suivante.

**Définition 2.4.2.** — Soit  $X$  une variété projective lisse uniréglée et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Un  $a$ -revêtement est un morphisme  $f : Y \rightarrow X$  où  $Y$  est une variété projective lisse et  $f$  est un morphisme mince dominant (donc non birationnel) satisfaisant  $a(Y, f^*L) = a(X, L)$ .

Étant donné un gros diviseur  $L$  et un morphisme mince  $f : Y \rightarrow X$ , on dira que  $f$  est *géométriquement accumulateur* si

$$(1) \quad (a(Y, f^*L), b(Y, f^*L)) > (a(X, L), b(X, L))$$

en ordre lexicographique. On dira que  $f$  est *faiblement géométriquement accumulateur*, ou plus simplement *faiblement accumulateur* si l'on a l'inégalité large

$$(a(Y, f^*L), b(Y, f^*L)) \geq (a(X, L), b(X, L)).$$

La contraction de faces dans le cône de courbes numériquement effectives va être également une condition importante par la suite. Si  $f : Y \rightarrow X$  est un  $a$ -revêtement, la formule de Riemann-Hurwitz donne

$$K_Y \equiv f^*K_X + \sum_i d_i E_i$$

où les  $E_i$  sont des diviseurs effectifs. Si  $\alpha$  est une classe de  $\text{Nef}_1(Y)$  alors  $f_*\alpha \in \text{Nef}_1(X)$ . En effet, si  $D$  est un diviseur pseudo-effectif sur  $X$ , par la formule de projection

$$D \cdot f_*\alpha = f^*D \cdot \alpha \geq 0.$$

On suppose de plus que  $\alpha$  appartient à la face extrême  $F(Y, f^*L)$ . De là,

$$\begin{aligned} (K_X + a(X, L)L) \cdot f_*\alpha &= (f^*K_X + a(X, L)f^*L) \cdot \alpha \\ &= (f^*K_X + a(Y, f^*L)f^*L) \cdot \alpha \\ &= (K_Y + a(Y, f^*L)f^*L) \cdot \alpha - \sum_i d_i E_i \cdot \alpha \\ &= - \sum_i d_i E_i \cdot \alpha \leq 0 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit  $(K_X + a(X, L)L) \cdot f_*\alpha = 0$ . Ceci montre que le poussé-en-avant  $f_* : N_1(Y) \rightarrow N_1(X)$  envoie  $F(Y, f^*L)$  dans  $F(X, L)$ .

**Définition 2.4.3.** — On dit qu'un  $a$ -revêtement  $f : Y \rightarrow X$  est *face-contractant* pour  $L$  si le poussé-en-avant induit sur les faces extrêmes  $f_* : F(Y, f^*L) \rightarrow F(X, L)$  n'induit pas une injection de  $F(Y, f^*L)$  dans  $F(X, L)$ .

**Remarque 2.4.4.** — Puisque  $b(Y, f^*L)$  et  $b(X, L)$  sont les dimensions de  $F(Y, f^*L)$  et  $F(X, L)$ , un  $a$ -revêtement géométriquement accumulateur contracte nécessairement la face. Mais il est aussi possible d'avoir égalité des dimensions tout en ayant une contraction de face.

**Exemple 2.4.5.** — Considérons le cas  $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  et  $L = \mathcal{O}(k, l)$  avec  $k$  et  $l$  des entiers premiers entre eux vérifiant  $k \geq l \geq 2$ . On a  $a(X, L) = \max(2/k, 2/l) = 2/l$  et  $b(X, L) = 1$ . Une courbe rationnelle  $\varphi : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  est donnée par deux morphismes  $f_1 : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  et  $f_2 : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$

chacun donné, à une constante près, par un couple de polynômes homogènes à deux indéterminées et premiers entre eux, de même degré que l'on note  $\deg f_i$ . Le  $L$ -degré de  $\varphi$  est alors

$$k \deg f_1 + l \deg f_2$$

tandis que la dimension d'une composante contenant  $\varphi$  est

$$2(\deg f_1 + 1) - 1 + 2(\deg f_2 + 1) - 1 = 2(\deg f_1 + \deg f_2) + 2.$$

À  $L$ -degré fixé  $d$ , le nombre de composantes est donné par le cardinal de

$$\{(d_1, d_2) \in \mathbf{N}^2 \mid kd_1 + ld_2 = d\}.$$

On remarque par ailleurs que la dimension d'une composante est la dimension attendue dans le cas  $L = -K_X = \mathcal{O}(2, 2)$ .

Soit  $Y$  une fibre de la seconde projection  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ . On note  $f : Y \rightarrow X$  l'inclusion : on a  $f^*L = L|_Y \cong \mathcal{O}(k)$  et  $K_Y \cong \mathcal{O}(-2)$ , donc  $a(Y, L) = 2/l$ ,  $b(Y, L) = 1$  et l'inclusion est faiblement accumulatrice. Les courbes rationnelles  $\varphi$  correspondantes sont celles telles que  $f_2$  est constant, et forment la composante de dimension maximale (toujours à  $L$ -degré fixé). La fibre  $Y$  est faiblement accumulatrice mais  $f$  n'est pas face-contractant. Ces fibres recouvrent pourtant la variété  $X$ . Ce type de phénomène apparaît lorsque l'on regarde le  $L$ -degré pour un fibré donné, et pas le degré donné par la classe de la courbe rationnelle.

Pour un autre exemple, voir [LT19, Exemple 3.7].

### 3. Quelques outils du Programme du Modèle Minimal

Certains des résultats exposés dans ce mémoire font appel à des résultats issus du Programme du Modèle Minimal. Nous donnons donc ici quelques définitions complémentaires et énonçons les théorèmes utilisés dans la suite du mémoire. Le but de ce paragraphe n'est aucunement de donner une présentation exhaustive de ce pan très riche et récent de la géométrie birationnelle des variétés. Pour une introduction au Programme, on se référera par exemple à [Deb01, Chapitre 7], [KM98, Chapitre 2] ainsi qu'aux premiers paragraphes de [BCHM10]. On supposera toujours que la caractéristique du corps de base est égale à zéro.

**3.1. Définitions complémentaires.** — Sauf mention contraire,  $X$  désigne jusqu'à la fin de cette partie une variété projective sur un corps  $\mathbf{k}$  de caractéristique nulle.

*Dimension et fibrations d'Itaka.* — La dimension d'Itaka est un invariant birationnel naturel qui mesure l'effectivité d'un diviseur.

**Définition 3.1.1.** — Supposons que  $X$  soit normale. Si  $L$  est un fibré en droites sur  $X$ , on note  $\mathbf{N}(L)$  l'ensemble des entiers positifs  $m$  tels que  $L^{\otimes m}$  est effectif, et on considère pour tout  $m \in \mathbf{N}(L)$  l'application rationnelle

$$\phi_m : \begin{cases} X & \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, L^{\otimes m})^\vee) \\ x & \mapsto [s \mapsto s(x)] \end{cases}$$

définie en dehors du lieu de base  $\text{Bs}(L^{\otimes m}) = \{x \in X \mid s(x) = 0 \ \forall s \in H^0(X, L^{\otimes m})\}$ . On note  $Y_m$  la clôture de Zariski de l'image de  $\phi_m$ . Si  $\mathbf{N}(L) \neq \{0\}$ , on définit la dimension d'Itaka de  $L$  sur  $X$  par

$$\kappa(X, L) = \max_{m \in \mathbf{N}(L)} \dim(Y_m)$$

et si  $\mathbf{N}(L) = \{0\}$  on fixe cette dimension à  $-\infty$ .

Enfin, si  $X$  n'est pas normale, on se donne  $\nu : X' \rightarrow X$  une normalisation et on pose  $\kappa(X, L) = \kappa(X', \nu^*L)$ .

Un fibré en droites a une dimension d'Iitaka positive si et seulement si l'un de ses multiples est effectif. Dans ce cas, on a  $0 \leq \kappa(X, L) \leq \dim(X)$ . Par exemple, si  $L$  est très ample, alors  $\kappa(L) = \dim(X)$  et  $\phi_1$  définit un plongement de  $X$  dans  $\mathbf{P}(H^0(X, L)^\vee)$  (en tant que partie localement close). Plus précisément, on a la caractérisation suivante.

**Proposition 3.1.2.** — *Un fibré en droite sur  $X$  est gros si et seulement si  $\kappa(X, L) = \dim(X)$ .*

On peut d'ailleurs choisir cette caractérisation pour définir le caractère *gros* d'un diviseur : c'est le choix fait par exemple par Lazarsfeld [Laz04a, Définition 2.2.1]. Notre choix (*cf* Définition 1.4.5) a l'avantage d'être une définition numérique. Pour l'équivalence entre les deux définitions, il s'agit d'une conséquence d'un lemme de Kodaira : on renvoie à [Laz04a, Corollaire 2.2.7]. À l'inverse, si  $\kappa(X, L) = 0$  alors  $L$  ne possède qu'une seule section et sa classe est située sur le bord du cône effectif.

Nous introduisons à présent la fibration d'Iitaka. On rappelle qu'une fibration est un morphisme projectif surjectif  $f : X \rightarrow Y$  entre variétés et vérifiant  $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ , c'est-à-dire dont la factorisation de Stein est triviale. En particulier, ses fibres sont connexes [Har77, Corollaire III.11.1].

**Théorème 3.1.3.** — *Soit  $X$  une variété normale et  $L$  un fibré en droites sur  $X$ , tel que  $\kappa(X, L) > 0$ . Alors pour  $m \in \mathbf{N}(L)$  suffisamment grand, il existe un fibré algébrique*

$$\phi_\infty : X_\infty \longrightarrow Y_\infty$$

avec  $\dim Y_\infty = \kappa(X, L)$  et un diagramme commutatif de morphismes et applications rationnelles

$$\begin{array}{ccc} X_\infty & \xrightarrow{u_\infty} & X \\ \downarrow \phi_\infty & & \downarrow \phi_m \\ Y_\infty & \xrightarrow{\nu_m} & Y_m \end{array}$$

où les flèches horizontales sont birationnelles. De plus, une fibre  $F$  très générale de  $\phi_\infty$  est de dimension d'Iitaka nulle par rapport à  $L_\infty = u_\infty^*L$  :

$$\kappa(F, (L_\infty)|_F) = 0.$$

On renvoie à [Laz04a, Théorème 2.1.33] pour la preuve de ce théorème. On se permettra plus loin l'abus de langage suivant : lorsqu'on parlera des fibres de la dimension d'Iitaka (sous-entendu *dans*  $X$ ), on aura en réalité choisi un  $m \in \mathbf{N}(L)$  assez grand tel que  $\phi_m : X \rightarrow Y_m$  soit birationnellement équivalent à la fibration  $\phi_\infty : X_\infty \rightarrow Y_\infty$  et on considèrera des fibres de  $\phi_m$  dans  $X$ .

*Lieux de base et variantes.* — Nous aurons besoin plus loin des variantes suivantes du lieu de base d'un diviseur de Cartier, ainsi que de la description du lieu de base étendu d'un diviseur nef et gros.

**Définition 3.1.4.** — Si  $X$  est une variété normale et  $L$  un diviseur  $\mathbf{Q}$ -Cartier sur  $X$ , le lieu de base stable de  $L$  est le fermé de Zariski de  $X$  défini par

$$\mathbf{B}(L) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}^*, mL \text{ Cartier}} \mathbf{Bs}(mL)$$

et le lieu de base étendu est le fermé de Zariski

$$\mathbf{B}_+(L) = \bigcap_{A \text{ } \mathbf{Q}\text{-Cartier ample}} \mathbf{B}(L - A).$$

Remarquons que si  $L$  et  $A$  sont  $\mathbf{Q}$ -Cartier et  $A$  ample, alors  $\mathbf{B}(L) \subset \mathbf{B}(L - A)$ , et donc  $\mathbf{B}(L) \subset \mathbf{B}_+(L)$  ce qui justifie la terminologie. Par [ELMNP06, Proposition 1.5], si  $L$  est  $\mathbf{Q}$ -Cartier, il existe un diviseur  $\mathbf{Q}$ -Cartier ample  $A$  tel que  $\mathbf{B}_+(L) = \mathbf{B}(L - A)$ . Le lieu de base étendu est un fermé strict de  $X$  si et seulement si  $L$  est gros, et est vide si et seulement si  $L$  est ample [ELMNP06, Exemple 1.7].

Le cas de  $L$  gros est exposé de façon synthétique dans [Laz04b, p. 247-248]. Dans ce cas, le lieu de base étendu est donné par le lieu de base stable de  $L - \varepsilon A$  pour  $A$  ample quelconque et  $\varepsilon$  suffisamment petit. Appelons  $\text{Null}(L)$  l'union de toutes les variétés irréductibles  $Y$  de  $X$  telles que  $L^{\dim Y} \cdot Y = 0$ , c'est-à-dire telles que  $L|_Y$  n'est pas gros. Si  $L$  est de plus nef sur  $X$ , alors le théorème suivant décrit le lieu de base étendu de  $L$ .

**Théorème 3.1.5 (Nakamaye [Nak00]).** — *Soit  $X$  variété projective lisse sur un corps algébriquement clôt de caractéristique nulle. Soit  $L$  un diviseur nef et gros sur  $X$ . Alors*

$$\mathbf{B}_+(L) = \text{Null}(L).$$

Le lemme suivant donne une application de la notion de lieu de base étendu au contrôle des variétés de  $L$ -degré borné. Dans ce mémoire, l'usage du schéma  $\text{Chow}(X)$  est épisodique et on renvoie à sa construction dans [Kol96]. On résume ici l'essentiel : fixons un diviseur ample sur une variété projective  $X$ , lequel définit un degré sur les  $r$ -cycles de  $X$ . Une famille de  $r$ -cycles de degré  $d$  au-dessus d'une base  $W$ , que l'on note  $\pi : \mathcal{U} \rightarrow W$ , peut être vue comme un cycle  $\mathcal{U}$  sur  $X \times W$  qui est en un certain sens plat ; la définition précise est donnée dans [Kol96, Définition I.3.10]. Dans notre cas, les familles de  $r$ -cycles effectifs de degré  $d$  sont paramétrées par un foncteur représenté par une variété projective  $\text{Chow}_{r,d}(X)$  [Kol96, Théorème I.3.21]. On parle alors de *famille de sous-variétés de  $X$*  si une fibre générale de cette famille est intègre. L'union sur  $r$  et  $d$  de  $\text{Chow}_{r,d}(X)$  définit  $\text{Chow}(X)$ .

**Lemme 3.1.6.** — *Soient  $X$  une variété projective lisse et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ , et  $C > 0$  une constante.*

*Alors la partie de  $\text{Chow}(X)$  paramétrant les sous-variétés  $Y \subset X$  telles que*

$$Y \not\subset \mathbf{B}_+(L) \quad \text{et} \quad Y \cdot L^{\dim Y} \leq C$$

*est contenue dans un fermé strict de  $\text{Chow}(X)$ .*

*Démonstration.* — On dispose d'un  $\mathbf{Q}$ -diviseur ample  $A$  et d'un  $\mathbf{Q}$ -diviseur effectif  $E$  tels que

$$\mathbf{B}(E) = \mathbf{B}(L - A) = \mathbf{B}_+(L).$$

On se donne  $Y$  une sous-variété de  $X$  de dimension  $d$  qui n'est pas contenue dans  $\mathbf{B}_+(L)$ . Par définition de  $\mathbf{B}(E)$ , on dispose d'un diviseur  $E'$  effectif et  $\mathbf{Q}$ -linéairement équivalent à  $E$  tel que

$$Y \not\subset \text{Supp}(E')$$

auquel cas  $E' \cdot Y$  est un cycle effectif. On a alors

$$\begin{aligned} L^d - A^d &\equiv L^d - (L - E)^d \\ &\equiv E \cdot \sum_{i=1}^d L^{i-1} \cdot (L - E)^{d-i} \\ &\equiv E' \cdot \sum_{i=1}^d L^{i-1} \cdot A^{d-i} \end{aligned}$$



et donc

$$(L^d - A^d) \cdot Y \equiv \sum_{i=1}^d \underbrace{L^{i-1} A^{d-i}}_{\text{nef}} \cdot \underbrace{(E' \cdot Y)}_{\text{effectif}} \geq 0.$$

Ainsi

$$0 < A^d \cdot Y \leq L^d \cdot Z \leq C.$$

Puisque  $A$  est ample,

$$\{Y \mid A^d \cdot Y \leq C\}$$

est borné dans  $\text{Chow}(X)$ . □

**3.2. Singularités et fibration canonique.** — Il existe en réalité différentes versions du Programme du Modèle Minimal selon les singularités que l'on admet dans celui-ci. On présente ici ce que l'on entend par types de singularités, suivant [KM98].

Soit une paire  $(X, \Delta)$  où  $X$  est une variété normale et  $\Delta = \sum d_i D_i$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur, tel que  $m(K_X + \Delta)$  est Cartier pour un certain  $m > 0$ . Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme birationnel avec  $Y$  normale, dont on note  $E$  le lieu exceptionnel et  $E_i$  les diviseurs exceptionnels irréductibles le composant. Notons

$$f_*^{-1} \Delta = \sum d_i f_*^{-1} D_i.$$

Il existe des nombres rationnels  $a(E_i, X, \Delta)$  tels que  $ma(E_i, X, \Delta)$  soit entier pour tout  $i$  et

$$\mathcal{O}_Y(m(K_Y + f_*^{-1} \Delta)) \cong f^* \mathcal{O}_X(m(K_X + \Delta)) \otimes_i \mathcal{O}_Y(ma(E_i, X, \Delta)) E_i.$$

**Définition 3.2.1.** — Avec les notations ci-dessus, le rationnel  $a(E_i, X, \Delta)$  est appelé *discrépance* de  $E_i$  par rapport à la paire  $(X, \Delta)$ . La *discrépance* de  $(X, \Delta)$  est par définition

$$\text{discrep}(X, \Delta) = \inf\{a(E, X, \Delta) \mid E \text{ diviseur exceptionnel sur } X\}.$$

On dit alors que la paire est  $(X, \Delta)$  est :

- Terminale si  $\text{discrep}(X, \Delta) > 0$  ;
- Canonique si  $\text{discrep}(X, \Delta) \leq 0$ .

On dit qu'elle est :

- Kawamata log terminale si  $\text{discrep}(X, \Delta) > -1$  et  $-\lfloor \Delta \rfloor = -\sum \lfloor d_i \rfloor D_i$  est effectif ;
- Log terminale pure si  $\text{discrep}(X, \Delta) > -1$  ;
- Log canonique si  $\text{discrep}(X, \Delta) \geq -1$ .

*Fibration canonique.* — Considérons l'anneau canonique

$$R(X, K_X + \Delta) = \bigoplus_{\substack{m \in \mathbf{N} \\ m(K_X + \Delta) \text{ Cartier}}} H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X + \Delta)))$$

associé à la paire  $(X, \Delta)$ .

**Théorème 3.2.2 ([BCHM10, Corollaire 1.1.2]).** — Soit  $(X, \Delta)$  une paire projective Kawamata log terminale telle que  $K_X + \Delta$  est  $\mathbf{Q}$ -Cartier. Alors l'anneau  $R(X, K_X + \Delta)$  est engendré par un nombre fini d'éléments.

**Définition 3.2.3.** — Soit  $(X, \Delta)$  une paire projective Kawamata log terminale telle que  $K_X + \Delta$  est  $\mathbf{Q}$ -Cartier. On appelle fibration canonique le morphisme  $X \rightarrow \text{Proj}(R(X, K_X + \Delta))$  associé à l'anneau  $R(X, K_X + \Delta)$ .

*Fibration de Mori.* — Dans le cadre de la version du Programme utilisée dans [BCHM10], l'objectif de celui-ci est de fournir pour  $X$  un modèle (au sens de l'équivalence birationnelle) qui soit log terminal ou une fibration de Mori.

**Définition 3.2.4.** — Soit  $(X, \Delta)$  une paire log canonique. Un espace fibré de Mori, ou fibration de Mori, est un morphisme projectif  $f : X \rightarrow Z$  entre variétés normales tel que

- $X$  est  $\mathbf{Q}$ -factorielle et  $\Delta$  est un  $\mathbf{R}$ -diviseur ;
- $\rho(X) - \rho(Z) = 1$  et  $\dim Z < \dim X$  (c'est-à-dire  $f$  est un morphisme contractant) ;
- $-(K_X + \Delta)$  est ample sur les fibres de  $f$  (c'est-à-dire  $f$ -ample).

Une fibration de Fano est un morphisme de variétés dont la fibre générale est une variété de Fano. Par [BCHM10, Corollaire 1.3.3] et [Deb01, Corollaire 4.11, Exemple 4.7], en caractéristique nulle toute variété quasiprojective lisse uniréglée est birationnelle à une fibration de Fano.

### 3.3. Modèle minimal

**Définition 3.3.1.** — Un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur un schéma propre est dit semi-ample s'il existe un entier  $m > 0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  soit généré par ses sections globales. Un diviseur  $D$  est dit semi-ample si  $\mathcal{O}_X(D)$  l'est.

Le théorème suivant est un corolaire de [BCHM10].

**Théorème 3.3.2 ([LTT18, Théorème 2.3]).** — *Soit  $X$  une variété projective lisse et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Si  $K_X + L$  est pseudo-effectif, alors il existe une contraction birationnelle  $\phi : X \dashrightarrow X'$  vers une variété  $\mathbf{Q}$ -factorielle et terminale  $X'$  telle que  $K_{X'} + \phi_*L$  est semi-ample.*

Le résultat suivant nous sera également utile lors de l'étude des sous-variétés accumulatrices.

**Théorème 3.3.3 ([LT17, Théorème 3.5]).** — *Soit  $X$  une variété projective et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Supposons que  $\kappa(X, K_X + a(X, L)L) = 0$ . Alors il existe une contraction birationnelle  $\phi : X \dashrightarrow X'$  vers une variété  $X'$  presque de Fano  $\mathbf{Q}$ -factorielle et terminale telle que  $a(X, L)\phi_*L + K_{X'}$  soit numériquement trivial et  $b(X, L) = b(X', \phi_*L)$ .*

PARTIE II. ÉTUDE DES COMPOSANTES DE  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ 4. Dimension des composantes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$ 

Comme évoqué en introduction de ce mémoire, il est possible de distinguer deux phénomènes d'accumulation de courbes rationnelles. Le premier est l'existence de composantes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  de dimension strictement plus grande que celle attendue. Le second phénomène correspond à un nombre trop grand de composantes, données par des courbes rationnelles admettant une factorisation non triviale : c'est l'objet de la section 5 de ce mémoire.

Jusqu'ici nous avons considéré le multidegré, cf. Définition 2.1.5.

$$\underline{\text{deg}} : \begin{cases} \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X) & \longrightarrow & \text{Hom}(\text{Pic}(X), \mathbf{Z}) \\ \varphi & \longmapsto & ([L] \mapsto \text{deg}(\varphi^*(L))) \end{cases}$$

Donnons-nous une classe  $\alpha$  de courbes pseudo-effectives. La dimension attendue d'une composante de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  est  $-K_X \cdot \alpha + \dim X$ , cf. Théorème 4.2.2. Si  $Y$  est une sous-variété de  $X$ , il n'y a aucune raison que la dimension attendue pour une composante de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, Y)$  soit inférieure strictement à celle attendue pour une composante de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ . En revanche, on pourra avoir des courbes  $\alpha$  sur  $Y$  telles que  $-K_Y \cdot \alpha > -K_X \cdot \alpha$ , conduisant à une composante de dimension trop grande. Dans le cas des variétés projectives lisses uniréglées, nous montrerons que les composantes de dimension trop grande sont bien détectées par l'invariant  $a$  (cf. Proposition 4.2.3).

Plus généralement, soit  $\pi : Y \rightarrow X$  un morphisme entre deux variétés projectives. Ce morphisme induit un morphisme  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, Y) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  et un morphisme  $\pi^*$  entre les groupes de Néron-Severi de  $X$  et  $Y$ , donné par  $\pi^*([L]) = [\pi^*(L)]$ . On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}(\mathbf{P}^1, Y) & \longrightarrow & \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \\ \downarrow \underline{\text{deg}} & & \downarrow \underline{\text{deg}} \\ \text{NS}(Y)^\vee & \xrightarrow{(\pi^*)^\vee} & \text{NS}(X)^\vee \end{array}$$

Le morphisme  $(\pi^*)^\vee$  n'est en général pas injectif. Ainsi, le degré ne permet pas de distinguer en général des composantes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  qui proviennent de composantes différentes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, Y)$ . C'est le second phénomène, dont nous donnerons un exemple dans la section 5. Notre premier but est de montrer qu'il est possible d'exclure les sous-variétés dont l'invariant  $a$  est strictement plus grand que celui de  $X$ . Leur réunion forme un ensemble dit *exceptionnel*. Il s'agit de vérifier qu'elles ne recouvrent pas  $X$  : c'est l'objet du prochain paragraphe. Ensuite nous montrerons qu'une fois exclues les courbes se factorisant à travers ces variétés et dans le cas des variétés uniréglées, les composantes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  données par la face extrême  $F(X, L)$  ont la dimension attendue : c'est l'objet du Théorème 4.2.5.

**4.1. Ensemble exceptionnel pour  $a$ .** — Dans ce paragraphe on donne une preuve détaillée du résultat essentiel suivant.

**Théorème 4.1.1.** — *Soient  $X$  une variété projective lisse, uniréglée,  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Considérons*

$$V = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y \quad \text{où } \mathcal{Y} = \{Y \subset X \mid Y \text{ sous-variété telle que } a(Y, L|_Y) > a(X, L)\}.$$

*Alors  $V$  est contenu dans un fermé strict de  $X$ . De plus, ses composantes sont les éléments d'invariant  $a$  maximal.*

Par la suite on appellera abusivement *fermé accumulateur* un fermé strict de  $X$  contenant l'ensemble  $V$  du Théorème 4.1.1. La preuve de ce théorème est due à B. Lehmann, S. Tanimoto et Y. Tschinkel et est exposée dans [LTT18]. Dans ce papier, les auteurs supposent la conjecture de Borisov-Alexeev-Borisov vérifiée. Or, celle-ci a été prouvée récemment par Birkar [Bir16].

**Théorème 4.1.2 (WBAB<sub>n</sub>).** — *Soit  $n$  un entier positif. Il existe un réel strictement positif  $\delta(n)$  tel que toute variété de Fano  $\mathbf{Q}$ -factorielle terminale  $X$ , de dimension inférieure ou égale à  $n$  et de rang de Picard égal à 1 satisfait*

$$(-K_X)^{\dim X} \leq \delta(n).$$

*Familles de sous-variétés.* — Le résultat sur lequel repose la démonstration du Théorème 4.1.1 concerne les familles dominantes de sous-variétés d'une variété lisse projective, au sens de [Kol96, Définition I.3.10]. Celles-ci ne sont en général pas géométriquement accumultrices.

**Proposition 4.1.3.** — *Soit  $X$  une variété projective lisse et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros. Soit  $\pi : \mathcal{U} \rightarrow W$  une famille dominante de sous-variétés de  $X$ . Si  $Y$  est un élément général de la famille  $\mathcal{U}$ , alors  $a(Y, L) \leq a(X, L)$ .*

*Démonstration.* — Quitte à prendre une résolution de la famille universelle  $\mathcal{U}$ , on la suppose lisse. On note  $d$  la dimension des fibres de  $\pi$ , (on suppose dans la suite  $d \geq 1$ ),  $n$  la dimension de  $X$  et  $m$  celle de  $\mathcal{U}$ . On a donc  $\dim W = \dim \mathcal{U} - d \geq n - d$ . Considérons  $Y$  une fibre de  $\pi$  dont le fibré normal est trivial. Remarquons que la trivialité du fibré normal d'une fibre est une condition ouverte sur  $W$ . En effet, étant donnée une fibre  $Y$ , son fibré normal est trivial si et seulement si il existe un  $(m - d)$ -uplet de sections globales  $s_1, \dots, s_{m-d} \in H^0(Y, \mathcal{N}_{Y/\mathcal{U}})$ , dont le lieu de dégénérescence est vide, c'est-à-dire  $s_1(y) \wedge \dots \wedge s_{m-d}(y) \neq 0$  pour tout point fermé  $y \in Y$ . Si cette condition est vérifiée par  $Y$ , et que l'on déforme légèrement la variété, cette condition reste vérifiée. Les fibres dont le fibré normal est trivial sont donc données par un ouvert de  $W$ . Autrement dit, le fibré normal d'une fibre générale est trivial.

Une telle fibre vérifie alors les hypothèses de [Pet12, Théorème 6.2], ce qui fournit le fait suivant : l'inclusion naturelle  $N_1(Y) \rightarrow N_1(\mathcal{U})$  envoie  $\text{Nef}_1(Y)$  dans  $\text{Nef}_1(\mathcal{U})$ . On en déduit en particulier qu'une classe nef sur  $Y$  est envoyée sur une classe nef sur  $X$  via  $(s|_Y)_*$ .

On suppose  $\dim W > n - d$ . Considérons la section de  $W$  par un hyperplan général  $H$  : le lemme suivant va nous permettre de faire chuter la dimension de  $W$ , *a fortiori* celle de la famille universelle  $\mathcal{U}$ , tout en conservant la fibre générale  $Y$ .

**Lemme 4.1.4.** — *Si  $\dim(\mathcal{U}) > \dim(X)$ , pour un hyperplan général  $H$ , la section de  $W$  par  $H$  induit une famille dominante*

$$W \leftarrow \mathcal{U}_H \rightarrow X$$

*au sens de [Kol96, Définition I.3.10] avec  $\mathcal{U}_H$  lisse et contenant  $Y$ .*

*Preuve du lemme.* — On note  $U_i$  les composantes irréductibles de  $\mathcal{U}$  telles que  $\mathcal{U} = \sum_i m_i [U_i]$  en tant que cycle, et un  $W_0$  ouvert dense de  $W$  tel que  $g|_{U_i}$  est plat au-dessus de  $W_0$ . La restriction  $\pi_H : \mathcal{U}_H \rightarrow W \cap H$  de  $\mathcal{U}$  à la section de  $W$  par un hyperplan  $H$  est définie sur chacune de ses composantes par le carré cartésien suivant et il est clair qu'il existe un  $H$  tel que la restriction soit lisse et contienne la fibre  $Y$ .

$$\begin{array}{ccc} (U_i)_H & \longrightarrow & U_i \\ \downarrow (\pi|_{U_i})_H & & \downarrow \pi|_{U_i} \\ H \cap W & \longrightarrow & W \end{array}$$

Les trois premiers points de [Kol96, Définition I.3.10] sont vérifiés : il existe un sous-schéma réduit  $\text{Supp}(\mathcal{U}_H)$  de  $X \times (W \cap H)$  de composantes irréductibles  $(U_i)_H$ , que l'on note par la suite aussi  $\mathcal{U}_H$ , tel que  $\mathcal{U}_H = \sum_i m_i [(U_i)_H]$  est un cycle algébrique, et  $\pi : \mathcal{U}_H \rightarrow W \cap H$  est un morphisme propre. De plus, par changement de base  $g_{|(U_i)_H}$  est plat au-dessus de l'ouvert  $W_0 \cap H \subset W \cap H$ . Reste à vérifier que la fibre, au sens des cycles, au-dessus de  $w \in W \cap H$  est bien définie [Kol96, Définition I.3.10.4].

On se donne  $T$  le spectre d'un anneau de valuation discrète. On note  $\eta$  le point générique et  $s$  le point fermé, et on se donne un morphisme  $h : T \rightarrow W \cap H$  tel que  $h(s) = w$  et  $h(\eta) \in W_0 \cap H$ . Alors la composée de  $h$  avec l'inclusion  $W \cap H \hookrightarrow W$  est un morphisme  $T \rightarrow W$  envoyant  $s$  sur  $w$  et  $\eta$  dans  $W_0$ . Par hypothèse la fibre de  $\pi|_{U_i}$  au-dessus de  $w$  est irréductible, et la fibre de  $\pi$  au-dessus de  $w$ , en tant que cycle, essentiellement égale [Kol96, Définition I.3.8] à  $\sum_i m_i \lim_{h \rightarrow w} (U_i/W)$  où

$$\lim_{h \rightarrow w} (U_i/W) \in Z_d \left( \pi|_{U_i}^{-1}(w) \times_w \{s\} \right)$$

est la fibre, au sens des cycles, de  $\pi|_{U_i}$  au-dessus de  $w$  le long de  $h$  [Kol96, Définition I.3.9]. Or il est clair par le diagramme suivant que celle-ci coïncide avec celle de  $\pi|_{U_i \cap H}$  au-dessus de  $w \in W \cap H$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \pi|_{U_i}^{-1}(w) \times_w \{s\} & \longrightarrow & \{s\} & \longrightarrow & T & & \\ \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h & \searrow & \\ \pi|_{U_i}^{-1}(w) & \longrightarrow & \{w\} & \longrightarrow & W \cap H & \longrightarrow & W \end{array}$$

Le point crucial est de vérifier qu'il existe  $H$  tel que la composée  $\mathcal{U}_H \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow X$  soit dominante. Puisque  $\mathcal{U} \rightarrow X$  est dominante, pour tout ouvert  $V \subset X$  on a  $(V \times W) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ . Par conséquent, si on note  $\mathcal{U}_{k(X)}$  la fibre générique de  $\mathcal{U} \rightarrow X$ , on a donc  $\mathcal{U}_{k(X)} \neq \emptyset$  et il s'agit de montrer que pour un hyperplan général,  $(\mathcal{U}_H)_{k(X)} \neq \emptyset$ .

Considérons donc  $U = U_i$  comme plus haut. Le diagramme suivant constitué de deux carrés cartésiens permet de définir la section  $(U_{k(X)})_H$  ci-dessous et de vérifier que  $(U_{k(X)})_H \cong (U_H)_{k(X)}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & U_{k(X)} & \longrightarrow & \text{Spec}(k(X)) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ U_H & \longrightarrow & U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ W \cap H & \longrightarrow & W & & \end{array}$$

En effet, si  $Z \rightarrow U_H$  et  $Z \rightarrow k(X)$  sont des morphismes, on obtient le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec}(k(X)) \\ & \swarrow 2 & \downarrow & \searrow 1 & \downarrow \\ (U_{k(X)})_H & \longrightarrow & U_{k(X)} & \longrightarrow & \text{Spec}(k(X)) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & U_H & \longrightarrow & U & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & W \cap H & \longrightarrow & W & & \end{array}$$

La première flèche pointillée est donnée par la propriété universelle du carré cartésien appliquée à la composée  $Z \rightarrow U_H \rightarrow U$  et à  $Z \rightarrow k(X)$ . La seconde flèche est ensuite donnée par la première et par  $Z \rightarrow U_H \rightarrow W \cap H$ . Par la propriété universelle du produit fibré, on a bien  $(U_{k(X)})_H \cong (U_H)_{k(X)}$ .

Il suffit donc à présent de justifier que pour  $H$  général,  $(U_{k(X)})_H$  est non-vide. Or on a supposé  $\dim(\mathcal{U}) > \dim(X)$  donc toute composante irréductible  $U$  de  $\mathcal{U}$  vérifie que  $U_{k(X)}$  est une variété sur  $k(X)$  de dimension strictement positive.

$$\begin{array}{ccc} U_{k(X)} & \longrightarrow & \text{Spec}(k(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathbf{k}) \end{array}$$

Alors  $U_{k(X)}$  vue comme une sous-variété de  $W \times_{\mathbf{k}} \text{Spec}(k(X))$  est de dimension strictement positive. Ainsi pour un hyperplan général  $H$  sur  $\mathbf{k}$  l'intersection  $H \times_{\mathbf{k}} \text{Spec}(k(X)) \cap U_{k(X)}$  est non-vide, intersection qui n'est autre que  $(U_{k(X)})_H$ .  $\square$

Revenons à la preuve de la Proposition 4.1.3. La section de  $W$  par un hyperplan général fournit par restriction une famille lisse  $\mathcal{U}_{W_1} \rightarrow W_1$  contenant  $Y$  et dont la base est de dimension  $n - 1$ . En réitérant ce procédé, on obtient une famille  $\mathcal{U}_T$  contenant  $Y$ , dont la base  $T$  est de dimension  $n - d$  et  $\mathcal{U}_T \rightarrow X$  est génériquement finie et dominante. Le fibré normal de  $Y$  vue dans  $\mathcal{U}_T$  est trivial et on peut à nouveau appliquer [Pet12, Théorème 6.2].

La famille  $\mathcal{U}_T \rightarrow X$  étant génériquement finie et dominante, le fibré canonique de  $\mathcal{U}_T$  est par conséquent équivalent à

$$s_{|\mathcal{U}_T}^* K_X + E$$

où  $E$  est un diviseur effectif donné par le lieu exceptionnel de  $s_{|\mathcal{U}_T} : \mathcal{U}_T \rightarrow X$ . Soit  $\alpha$  une classe de courbe nef sur  $Y$ . Via l'inclusion  $i : Y \rightarrow \mathcal{U}_T$  et par la formule de projection,

$$\begin{aligned} (K_Y + a(X, L)s_{|Y}^* L) \cdot \alpha &= (K_{\mathcal{U}_T} + a(X, L)s_{|\mathcal{U}_T}^* L) \cdot i_* \alpha \\ &= (s_{|\mathcal{U}_T}^* K_X + E + a(X, L)s_{|\mathcal{U}_T}^* L) \cdot i_* \alpha \\ &\geq (s_{|\mathcal{U}_T}^* K_X + a(X, L)s_{|\mathcal{U}_T}^* L) \cdot i_* \alpha \\ &= (K_X + a(X, L)L)(s_{|Y})_* \alpha \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

et donc par dualité  $K_Y + a(X, L)(s_{|Y})^* L$  est pseudo-effectif. Par ailleurs, on avait supposé  $Y$  lisse sans perte de généralité puisque  $a$  est un invariant birationnel. Finalement  $a(Y, L) \leq a(X, L)$ .  $\square$

*Sous-variétés accumulatrices.* — On montre à présent qu'il est possible d'isoler dans un fermé strict de  $X$  les variétés accumulatrices d'une famille quelconque. C'est le résultat le plus fort de ce paragraphe et duquel on pourra déduire le Théorème 4.1.1.

**Théorème 4.1.5.** — *Soit  $X$  une variété projective lisse et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Soit  $\pi : \mathcal{U} \rightarrow W$  une famille de sous-variétés de  $X$ . Il existe un fermé strict  $V \subset X$  tel que tout élément  $Y$  de  $\mathcal{U}$  vérifiant  $a(Y, L) > a(X, L)$  est contenu dans  $V$ .*

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur la dimension des composantes irréductibles de  $W$ . Le cas de la dimension nulle est claire :  $W$  est alors une union disjointe finie de points. On suppose qu'on a prouvé le résultat jusqu'à la dimension  $p - 1$ . Soit  $\pi : \mathcal{U} \rightarrow W$  une famille de sous-variétés de  $X$  où  $\dim(W) = p$ . Si la famille n'est pas dominante, alors son image dans  $X$

convient. Supposons donc qu'elle l'est, alors par la Proposition 4.1.3 les points de  $W$  au-dessus desquels la fibre  $Y$  de  $\pi$  vérifie  $a(Y, L) > a(X, L)$  sont contenus dans un fermé strict  $W' \subset W$  vérifiant donc  $\dim(W') < \dim(W)$ . Notons  $W'_i$  les composantes irréductibles de  $W'$  et  $\mathcal{U}'_i \rightarrow W'_i$  les restrictions de  $\mathcal{U} \rightarrow W$  aux  $W'_i$ , lesquelles sont en nombre fini. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des fermés stricts  $V'_i \subset X$  tels que tout élément de  $\mathcal{U}_i$  vérifiant  $a(Y, L) > a(X, L)$  est contenu dans  $V'_i$ . Finalement tout élément de  $\mathcal{U}$  vérifiant  $a(Y, L) > a(X, L)$  est contenu dans le fermé strict  $V = \cup_i V'_i$ .  $\square$

*Recouvrement par des sous-variétés de même invariant  $a$ .* — La dichotomie suivante fait intervenir les outils du Programme du Modèle Minimal dans la démonstration du Théorème 4.1.1. C'est un élément essentiel de la construction par récurrence d'un fermé accumulateur. Sa preuve fait également appel au Théorème 4.1.5.

**Proposition 4.1.6.** — *Soit  $X$  une variété projective uniréglée de dimension  $n$ . Soit  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Alors*

- *$X$  est recouverte par des sous-variétés strictes  $Y$  telles que  $a(Y, L|_Y) = a(X, L)$*
- ou bien
- *$X$  est birationnelle à une variété de Fano  $\mathbf{Q}$ -factorielle, terminale et de rang de Picard égal à 1.*

*Démonstration.* — Supposons tout d'abord que  $\kappa(K_X + a(X, L)L) \geq 1$ . Alors les fibres de la fibration d'Iitaka recouvrent  $X$  et vérifient  $a(Y, L) = a(X, L)$ . En effet, par le Théorème 4.1.5 on a  $a(Y, L) \leq a(X, L)$  pour une fibre générale. Mais  $a(Y, L) < a(X, L)$  impliquerait que  $(K_X)_Y + a(X, L)L|_Y$  est gros sur  $Y$ , ce qui est faux pour une fibre très générale de la fibration d'Iitaka, cf. Théorème 3.1.3.

Supposons à présent que  $\kappa(K_X + a(X, L)L) = 0$  et appliquons le programme du modèle minimal (cf. Théorème 3.3.2) à la paire  $(X, K_X + a(X, L)L)$  : soit  $\phi : X \dashrightarrow X'$  l'application birationnelle obtenue, où  $X'$  est  $\mathbf{Q}$ -factorielle et terminale. Dans ce cas, par le Théorème 3.3.3 on peut supposer de plus que  $K_{X'} + a(X, L)\phi_*L$  est numériquement trivial. Pour un choix  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, le programme du modèle minimal appliqué à  $(X, K_X + (1 - \varepsilon)a(X, L)L)$  fournit une contraction birationnelle  $\psi : X \dashrightarrow \tilde{X}$  vers une fibration de Mori  $\pi : \tilde{X} \rightarrow Z$  telle que  $K_{\tilde{X}} + a(X, L)\psi_*L$  est numériquement trivial sur les fibres générales de  $\pi$ . Quitte à considérer l'adhérence du graphe de  $\psi$  et remplacer  $X$  par une variété birationnellement isomorphe, on peut supposer que  $\psi$  est un morphisme. Si  $\dim Z = 0$ , alors  $\tilde{X}$  est une variété de Fano  $\mathbf{Q}$ -factorielle terminale de rang de Picard égal à 1. Supposons donc que  $\dim Z > 0$ .

Donnons-nous  $\tilde{Y}$  une fibre générale de  $\pi$  et  $Y = \psi^{-1}(\tilde{Y})$ . Soit  $\tilde{C}$  une courbe dans  $\tilde{Y}$ , obtenue en prenant une intersection complète d'hyperplans. Cette courbe  $\tilde{C}$  est mobile, et quitte à la déformer, on peut supposer qu'elle évite les points images du lieu exceptionnel de  $\psi$ , et donc que sa transformée stricte  $C$  par  $\psi$  évite le lieu exceptionnel de  $\psi$ . De plus,  $\psi$  étant une contraction birationnelle,  $C$  est nef. On a donc par la formule de projection

$$(K_Y + a(X, L)L|_Y) \cdot C = 0$$

et donc  $K_Y + a(X, L)L|_Y$  n'est pas dans l'intérieur du cône effectif de  $Y$  (c'est-à-dire que  $(K_X + a(X, L)L)|_Y$  n'est pas gros) et donc  $a(Y, L) \geq a(X, L)$ . Or par le Théorème 4.1.5, prendre  $Y$  générale fournit  $a(Y, L) \leq a(X, L)$ . On a finalement égalité.  $\square$

On déduit de cette proposition et du Théorème WBAB<sub>n</sub> le lemme suivant. Il permet notamment de contrôler le  $L$ -degré de sous-variétés géométriquement accumultrices.

**Lemme 4.1.7.** — Soit  $X$  une variété projective, uniréglée et lisse, de dimension  $n$  et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Alors

—  $X$  est dominée par des sous-variétés strictes  $Y$  vérifiant  $a(Y, L|_Y) = a(X, L)$

ou bien

—  $L^n \leq \frac{\delta(n)}{a(X, L)^n}$  où  $\delta(n)$  est un réel positif (indépendant de  $X$  et  $L$ ).

*Preuve du lemme.* — Il s'agit d'une conséquence de la Proposition 4.1.6, laquelle donne la première alternative, et du Théorème 4.1.2. On suppose donc que la première alternative n'est pas vérifiée et on se donne  $\phi : X \rightarrow X'$  un morphisme birationnel vers une variété de Fano  $\mathbf{Q}$ -factorielle terminale, de rang de Picard 1 et sur laquelle le fibré  $K_{X'} + a(X, L)\phi_*L$  est numériquement trivial. On note  $n$  la dimension de  $X$ . On a  $a(X, L) > 0$ .

Par le Théorème WBAB $_n$  (Théorème 4.1.2), on dispose d'une constante  $\delta(n)$  telle que

$$a(X, L)^n \operatorname{vol}(\phi_*L) = (-K_{X'})^n \leq \delta(n).$$

Mais par ailleurs puisque  $X'$  est normale et  $\mathbf{Q}$ -factorielle, nous avons l'inégalité

$$L^n = \operatorname{vol}(L) \leq \operatorname{vol}(\phi^*\phi_*L) = \operatorname{vol}(\phi_*L)$$

ce qui fournit bien

$$L^n \leq \frac{\delta(n)}{a(X, L)^n}$$

et conclut la preuve du lemme. □

*Fermé accumulateur : le cas des courbes.* — La construction d'un fermé strict contenant l'ensemble  $V$  du Théorème 4.1.1 se fait par récurrence finie sur la dimension des sous-variétés qui le composeront. Il s'agit donc dans un premier temps de le construire pour les courbes de  $X$ .

**Théorème 4.1.8.** — Soit  $X$  une variété projective lisse uniréglée et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros. Il existe une partie stricte  $V$  fermée dans  $X$  tel que toute courbe  $C$  de  $X$  vérifiant  $a(C, L) > a(X, L)$  est contenue dans  $V$ .

*Démonstration.* — Soit  $C$  une courbe sur  $X$  telle que  $a(C, L) > a(X, L)$ . Comme  $X$  est uniréglée, d'une part  $a(X, L) > 0$  et donc par conséquent une telle courbe vérifie  $a(C, L) > 0$ , d'autre part, il suffit de considérer les courbes  $C$  qui sont rationnelles. Considérons  $\mathbf{B}_+(L)$  le lieu de base étendu de  $L$ , qui est un fermé strict de  $X$  car  $L$  est gros. Par le Théorème de Nakamaye (Théorème 3.1.5),  $C \subset \mathbf{B}_+(L)$  si et seulement si  $C \cdot L = 0$ . Supposons donc à présent  $C \not\subset \mathbf{B}_+(L)$ , c'est-à-dire  $C \cdot L > 0$  puisque  $L$  est nef. Il vient  $a(C, L) = \frac{2}{L \cdot C}$  (cf. Exemple 2.3.3), et si  $a(C, L) > a(X, L)$  alors

$$0 < L \cdot C < \frac{2}{a(X, L)}.$$

D'après le Lemme 3.1.6 il n'y a qu'un nombre fini de familles de courbes de  $L$ -degré borné. Pour chaque famille de courbes, on applique alors le Théorème 4.1.5. □

*Conclusion.* — À présent nous sommes en mesure d'achever par récurrence la construction d'un fermé accumulateur.

*Preuve du Théorème 4.1.1. — Premier point.* On construit un fermé strictement inclus dans  $X$  contenant tous les  $Y$  tels que  $a(Y, L|_Y) > a(X, L)$  par récurrence sur la dimension de  $Y$ . On a donc d'abord prouvé plus haut le résultat pour les courbes (Théorème 4.1.8). Le passage à l'hérédité est ensuite permise par le Lemme 4.1.7.



Supposons qu'il existe fermé strict  $V_i$  de  $X$  tel que toute sous-variété  $Y$  de dimension inférieure ou égale à  $i \geq 1$  et vérifiant  $a(Y, L) > a(X, L)$  est contenue dans  $V_i$ . Donnons-nous une sous-variété  $Y$  de dimension  $i+1$  vérifiant  $a(Y, L) > a(X, L)$ . D'après le Lemme 4.1.7, deux cas sont possibles. Si  $Y$  est recouverte par des sous-variétés  $Z$  telles que  $a(Z, L) = a(Y, L)$ , alors  $Y$  est *de facto* contenue dans  $V_i$  et il n'y a rien à faire. Sinon, on a l'inégalité

$$Y \cdot L^{i+1} \leq \frac{\delta(i+1)}{a(Y, L)^{i+1}} < \frac{\delta(i+1)}{a(X, L)^{i+1}}$$

et le  $L$ -degré de  $Y$  est majoré par une certaine constante  $C > 0$ . Or d'après le Lemme 3.1.6, il existe un fermé de  $\text{Chow}(X)$  paramétrant les variétés de  $L$ -degré majoré par  $C$  et n'étant pas contenues dans  $\mathbf{B}_+(L)$ . Par le Théorème 4.1.5, les variétés  $Z$  de cette famille vérifiant  $a(Z, L) > a(X, L)$  sont contenues dans un fermé strict  $V'_{i+1}$ . On pose finalement

$$V_{i+1} = V_i \cup V'_{i+1} \cup \mathbf{B}_+(L).$$

Par irréductibilité de  $X$ , ceci définit bien un fermé strict de  $X$ . La récurrence se termine avec la construction du fermé strict  $V_{n-1}$ .

*Second point.* La preuve précise du premier point donne le fait suivant : chaque composante de  $V$  est dominée par une famille de sous-variétés d'invariant de Fujita plus grand que celui de  $X$ . On en déduit que toute composante de  $V$  va également avoir un invariant  $a$  plus grand que celui de  $X$ .  $\square$

*Quelques exemples de variétés sans accumulation.* — On donne pour terminer cette section quelques exemples de variétés pour lesquelles  $V$  est vide.

**Exemple 4.1.9 (D'après [CS09] et [LT19]).** — Soit  $X$  une hypersurface cubique lisse de dimension  $n \geq 3$ . Par la formule d'adjonction,  $K_X = -(n-1)H$  où  $H$  est la classe d'un hyperplan sur  $X$ , d'où  $a(X, H) = (n-1)$  par amplitude de  $H$ .

Soit  $Y$  une sous-variété de  $X$ , que l'on suppose lisse quitte à prendre une résolution. La Proposition 2.3.2 nous dit que  $a(Y, H) \leq \dim Y + 1$ . Une sous-variété de  $X$  de codimension au moins deux n'a donc pas un invariant de Fujita plus grand que celui de  $X$ .

Supposons alors que  $Y$  est de codimension 1. Par [LT19, Lemme 3.8], ou bien  $a(Y, H) \leq n-1$  ou bien  $H^{\dim Y} \cdot Y = 1$ , c'est-à-dire que  $Y$  est un sous-espace linéaire de codimension 1, ce qu'une hypersurface cubique lisse de dimension  $n \geq 3$  ne contient pas.

D'autres exemples de variétés sans ensemble exceptionnel pour  $a$  sont donnés par les hypersurfaces quartiques lisses de dimension  $n \geq 5$  [LT19, Exemple 4.9] ou les volumes de Fano de rang de Picard 1 et d'index 2 [LTT18, Section 6].

**4.2. Dimension de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$ .** — Le résultat suivant précise ce que nous entendons plus haut par *bonne dimension*. On fixe  $\alpha$  une classe dans  $\overline{\text{Eff}}_1(X)_{\mathbf{Z}}$ . Dans ce qui suit,  $U$  désignera toujours le complémentaire dans  $X$  du fermé  $\overline{V} \subsetneq X$  défini dans le Théorème 4.1.1. Le théorème suivant est un résultat classique de déformation.

**Théorème 4.2.1 ([Deb01, Théorème 2.6]).** — *Soient  $X$  et  $Y$  des variétés projectives sur un corps  $\mathbf{k}$ , et  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme sur  $\mathbf{k}$  tel que  $X$  est lisse le long de  $f(Y)$ .*

*Localement autour de  $[f]$ , le schéma  $\text{Mor}(Y, X)$  peut être défini par  $h^1(Y, f^*T_X)$  équations dans un sous-schéma lisse de dimension  $h^0(Y, f^*T_X)$ .*

*En particulier,*

$$\dim_{[f]} \text{Mor}(Y, X) \geq h^0(Y, f^*T_X) - h^1(Y, f^*T_X).$$

Dans le cas des courbes rationnelles, on déduit du théorème précédent et du Théorème de Riemann-Roch le résultat suivant.

**Théorème 4.2.2** ([Kol96, Théorème II.1.2]). — *Soit  $W$  une composante irréductible de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$ . Alors*

$$\dim W \geq -K_X \cdot \alpha + \dim X$$

*et si  $W$  paramètre une famille dominante de courbes, alors il y a égalité.*

*Preuve du premier point.* — Si  $Y = C$  est une courbe, le Théorème de Riemann-Roch fournit

$$\chi(C, f^*T_X) = -K_X \cdot f_*C + (1 - g(C)) \dim X$$

et donc

$$\dim_{[f]} \text{Mor}(C, X) \geq -K_X \cdot f_*C + (1 - g(C)) \dim X$$

ce qui dans le cas particulier  $C = \mathbf{P}^1$  fournit

$$\dim_{[f]} \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \geq -K_X \cdot f_*C + \dim X.$$

□

De plus, si  $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X) = 0$ , alors  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  est lisse en  $[f]$ . Avec les notations de la Définition 2.2.2, cela correspond à  $a_n \geq -1$ . Les courbes rationnelles libres sont donc paramétrées par des points réguliers de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ .

*Parties géométriquement accumulatrices.* — Un point fondamental est d'établir le lien entre la dimension d'une composante  $W$  de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  et l'invariant associé à son image dans  $X$ . La proposition suivante donne une première réponse.

**Proposition 4.2.3.** — *Soient  $X$  une variété projective lisse unirrégulée et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur effectif sur  $X$ . Soit  $W$  une composante irréductible de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  où*

$$(K_X + a(X, L)L) \cdot \alpha = 0$$

*Notons  $Z = \overline{\cup_{\varphi \in W} \text{Im}(\varphi)}$  l'adhérence, pour la topologie de Zariski, de l'image de  $W$  dans  $X$ . Alors,*

- *si  $\dim W > -K_X \cdot \alpha + \dim X$  alors  $a(Z, L|_Z) > a(X, L)$  ;*
- *si  $Z \subsetneq X$  alors  $a(Z, L|_Z) > a(X, L)$ .*

*Démonstration.* — On peut tout d'abord exclure le cas  $a(Z, L|_Z) = \infty$  puisqu'alors les deux points sont vérifiés. On suppose donc  $a(Z, L|_Z) < \infty$ . Le sous-schéma  $Z$  n'a aucune raison d'être lisse, on se donne donc  $f : Y \rightarrow Z$  une résolution des singularités. Puisque  $a$  est un invariant birationnel, on veut donc prouver  $a(Y, L) > a(X, L)$ . À la famille de courbes  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $W$  est associée une famille  $\mathcal{C}^\circ$  de courbes sur  $Y$  de la façon suivante : pour toute courbe  $C$  de  $\mathcal{C}$  on prend la clôture de  $f^{-1}(C \setminus E)$  où  $E$  est le lieu exceptionnel de  $f$ , appelée transformation stricte de la courbe  $C$  par  $f$ . La famille  $\mathcal{C}^\circ$  de courbes sur  $Y$  est paramétrée par un ouvert  $W^\circ$  de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, Y)$ .

Par définition de  $Z$ ,  $W^\circ$  est contenu dans une composante irréductible de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, Y)$  qui paramètre des courbes dominant  $Y$  (et est donc de la dimension attendue par le Théorème 4.2.2). Par conséquent si  $C$  est une courbe irréductible paramétrée par  $W^\circ$

$$\dim(W^\circ) \leq -K_Y \cdot C + \dim Y$$

et par ailleurs, puisque l'on a toujours

$$\dim(W^\circ) \geq -K_X \cdot f_*C + \dim X$$

il vient

$$-K_X \cdot f_*C + \dim X \leq -K_Y \cdot C + \dim Y.$$

Or nous avons supposé que  $\dim Y < \dim X$  ou  $\dim W > -K_X \cdot \alpha + \dim X$ , dans les deux cas cela fournit  $-K_X \cdot f_*C < -K_Y \cdot C$  c'est-à-dire par la formule de projection

$$(K_Y - f^*K_X) \cdot C < 0.$$

Or on a également supposé que  $(K_X + a(X, L)L) \cdot \alpha = 0$ , en particulier  $(K_X + a(X, L)L)|_Z \cdot f_*C = 0$ . On peut donc remplacer  $f^*K_X \cdot C$  par  $a(X, L)L|_Y \cdot C$  (à nouveau par projection), ce qui donne

$$(K_Y + a(X, L)L|_Y) \cdot C < 0$$

mais la famille  $\mathcal{C}^0$  domine la variété lisse  $Y$  : la courbe  $C$  est mobile, c'est-à-dire qu'elle est dans le dual du cône pseudo-effectif, qui est le cône  $\text{Nef}_1(Y)$  des courbes numériquement effectives. Il vient donc  $K_Y + a(X, L)L|_Y \notin \overline{\text{Eff}}^1(Y)$ . Par définition de l'invariant de Fujita, ceci revient à dire  $a(Y, L) > a(X, L)$  et conclut la preuve.  $\square$

*Dimension effective.* — Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, faisons la remarque suivante.

**Remarque 4.2.4.** — Dans les théorèmes suivants, nous allons pouvoir nous restreindre à des courbes numériquement effectives. En effet, soit  $\alpha \in \overline{\text{Eff}}_1(X)_{\mathbf{Z}} \setminus \text{Nef}_1(X)_{\mathbf{Z}}$  vérifiant  $(K_X + a(X, L)L) \cdot \alpha = 0$ . On suppose toujours  $X$  uniréglée. Alors

$$\text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha) = \emptyset.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que cela n'est pas le cas, et donnons-nous une courbe  $C$  de classe  $\alpha$  qui rencontre  $U$ . Déformons  $C$  pour obtenir une sous-variété  $Z$  de  $X$ , qui rencontre également  $U$  : nécessairement,  $a(Z, L|_Z) \leq a(X, L)$  par la Proposition 4.2.3 et  $X = Z$ . Alors, quitte à prendre une résolution de  $X$ ,  $\alpha$  est une classe numériquement effective, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Conclusion : on supposera  $\alpha \in F(X, L)$ .

**Théorème 4.2.5.** — Soit  $X$  une variété projective lisse uniréglée et soit  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur sur  $X$ , supposé nef et gros.

Supposons que  $\alpha$  appartienne à la face extrémale  $F(X, L)$ . Dans le cas où  $\text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  est non-vide, c'est-à-dire qu'il existe des courbes de classe  $\alpha$  rencontrant l'ouvert  $U$ , on a alors

$$\dim \text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha) = -K_X \cdot \alpha + \dim X.$$

De plus, toute composante de dimension  $\dim \text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  paramètre une famille dominante de courbes rationnelles.

*Démonstration.* — On sait par le Théorème 4.1.1 que  $U$  est non-vide. Ensuite, si  $W$  est une composante irréductible de  $\text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$ , on déduit du premier point de la Proposition 4.2.3 que la dimension de  $W$  est celle attendue, et du second point que la famille de courbes est dominante.  $\square$

On en déduit le cas particulier suivant.

**Théorème 4.2.6.** — Soit  $X$  une variété quasi de Fano. Supposons que  $\alpha \in \text{Nef}_1(X)_{\mathbf{Z}}$  : dans ce cas l'hypothèse  $\alpha \in F(X, -K_X)$  est toujours vérifiée. Dans le cas où  $\text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  est non-vide, c'est-à-dire qu'il existe des courbes de classe  $\alpha$  rencontrant l'ouvert  $U$ , on a alors

$$\dim \text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha) = -K_X \cdot \alpha + \dim X$$

De plus, toute composante de dimension  $\dim \text{Mor}_U(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  paramètre une famille dominante de courbes rationnelles.

## 5. Nombre de composantes : conjecture de Batyrev

**5.1. Vers une version affinée.** — La question du nombre de composantes constitue l'autre face de notre étude de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ . La conjecture suivante est attribuée à Batyrev [LT19, Conjecture 5.1].

**Conjecture 5.1.1.** — Soient  $X$  une variété projective lisse et uniréglée, et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Étant donnée une classe numériquement effective  $\alpha \in \text{Nef}_1(X)_{\mathbf{Z}}$ , on note  $h(\alpha)$  le nombre de composantes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  qui paramètrent génériquement des courbes libres.

Il existe un polynôme à coefficients entiers  $P$  tel que

$$h(\alpha) \leq P(L \cdot \alpha)$$

pour tout  $\alpha$ . Autrement dit, le nombre de composantes est bornée par un polynôme en le degré sur  $L$  de la courbe.

Il est naturel de chercher à affiner cette conjecture en précisant le degré du polynôme. On pourrait à première vue suggérer que celui-ci soit donné par  $b(X, L) - 1$ , mais les phénomènes de contraction de face fournissent un contre-exemple.

**Exemple 5.1.2.** — Donnons un exemple issu du cadre arithmétique [TB96]. Considérons  $V$  la sous-variété de  $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$  définie par le polynôme

$$f = \sum_{i=0}^3 X_i Y_i^3.$$

On travaille sur le corps  $\mathbf{C}$  ou sur un corps  $\mathbf{k}$  algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et 3.

On voit une courbe rationnelle  $\phi : \mathbf{P}^1 \rightarrow V$  comme un morphisme  $\phi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$  donné par deux 4-uplets de polynômes homogènes à deux indéterminées  $(P_0, P_1, \dots, P_3)$  et  $(Q_0, \dots, Q_0)$ , vérifiant de plus la condition  $\sum_{i=0}^3 P_i Q_i^3 = 0$ .

On vérifie facilement que  $V$  est lisse. Elle est également de Fano : par la formule d'adjonction (cf. Propriété 1.1.5), son fibré canonique est  $\mathcal{O}_V(-1, -3)$ , d'inverse ample. Le Théorème de Lefschetz pour les groupes de Picard [Laz04a, Exemple 3.1.25] fournit un isomorphisme

$$\mathbf{Z}^2 \cong \text{Pic}(\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(V)$$

et on a  $a(V, -K_V) = 1$ ,  $b(V, -K_V) = 2$ . On considère d'autre part le morphisme mince  $\alpha : \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$  induit par  $X_i \mapsto X_i^3$  et  $Y_i \mapsto Y_i$  pour  $i = 0, \dots, 3$ . On cherche à étudier une condition pour que le morphisme  $\phi$  se factorise à travers  $\alpha$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 & & \\ \downarrow \psi & \searrow \phi & \\ \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 & \xrightarrow{\alpha} & V \end{array}$$

On voit ici qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle factorisation existe est que  $\frac{P_i}{P_j}$  soit un cube dans  $\mathbf{k}(X, Y)$ . Supposons cette condition vérifiée et fixons les notations en posant  $(P_i/P_j) = (\tilde{P}_i/\tilde{P}_j)^3$  pour des polynômes homogènes  $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$  dans  $\mathbf{k}(X, Y)$ . Dès lors l'application  $\psi$  est donnée par les 4-uplets  $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$  et  $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$  et son image est incluse dans une variété  $W \subset \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$  donnée par l'équation

$$\sum_{i=0}^3 x_i^3 y_i^3 = 0.$$

Remarquons que  $W$  est singulière, le lieu singulier étant l'ensemble des points  $(x_0 : \dots : x_3, y_0 : \dots : y_3)$  vérifiant  $x_i y_i = 0$  pour tout  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Considérons  $\pi : W \rightarrow \mathbf{P}^3$  la première projection et notons  $\eta$  le point générique de  $\mathbf{P}^3$ . En considérant la fibre générique au-dessus de  $\mathbf{P}^3$ , on peut changer de base et voir  $W$  comme une surface cubique définie sur le corps de fractions  $\mathbf{k}(X_0, X_1, X_2, X_3) = \mathbf{k}(\mathbf{P}^3)$ .

$$\begin{array}{ccc} W_\eta & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \{\eta\} = \text{Spec } \mathbf{k}(\mathbf{P}^3) & \longrightarrow & \mathbf{P}^3 \end{array}$$

Supposons que le polynôme  $X^2 + X + 1$  soit scindé sur  $\mathbf{k}$ . La fibre générique  $W_\eta$ , vue comme surface sur  $\mathbf{k}(\mathbf{P}^3)$ , contient alors 27 droites données explicitement : les 9 premières sont données par

$$\begin{aligned} x_0 y_0 &= -j^k x_1 y_1 \\ x_2 y_2 &= -j^l x_3 y_3 \end{aligned}$$

où  $j$  est une racine de  $X^2 + X + 1$  et  $k, l$  des entiers parcourant  $\{0, 1, 2\}$ , ce qui nous donne bien neuf droites. Les dix-huit droites restantes sont obtenues en permutant circulairement les indices des indéterminées, ce qui donne bien deux autres groupes de neuf. Ces droites engendrent  $N_1(W_\eta/\mathbf{k}(\mathbf{P}^3)) \simeq \mathbf{Z}^7$ .

De là,  $\text{Cl}(W/\mathbf{k}) = \text{Cl}(W_\eta/\mathbf{k}) \oplus \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^8$  (notation de [Har77, Définition p. 131] pour le groupe de classes de diviseurs de Weil pour l'équivalence linéaire). En effet, si  $U$  est un ouvert de  $W$ , on a une suite exacte [Ful84, Proposition 1.8]

$$\oplus \mathbf{Z} \rightarrow \text{Cl}(W) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0$$

où la première somme est prise sur les diviseurs (de Weil) premiers à support dans  $W \setminus U$ . En particulier, soit  $V$  un ouvert de  $\mathbf{P}^3$  et  $U = \pi^{-1}(V)$ . On a donc, en passant à la limite sur l'ouvert  $V$ , une suite exacte

$$\oplus \mathbf{Z} \rightarrow \text{Cl}(W) \rightarrow \text{Cl}(W_\eta) \rightarrow 0$$

où la première somme est prise sur les diviseurs premiers ne dominant pas  $\mathbf{P}^3$ , c'est-à-dire les diviseurs verticaux donnés par des fibres  $W_p$  pour  $p \in \mathbf{P}^3$ . Ceux-ci sont donc tous rationnellement équivalents, leur image dans  $\text{Cl}(W)$  est  $\mathbf{Z}$  et il vient l'égalité attendue en passant à l'équivalence numérique. En considérant  $\tilde{W}$  une résolution de  $W$ , on obtient  $a(W, -\alpha^* K_V) = 1$  et  $b(W, -\alpha^* K_V) = \rho(\tilde{W}) \geq 8$ . Les équations

$$\begin{aligned} x_0 y_0 &= -j^k x_1 y_1 \\ x_2 y_2 &= -j^l x_3 y_3 \end{aligned}$$

pour  $k, l \in \{0, 1, 2\}$  définissent un diviseur de Cartier sur  $W$  qui n'est pas dans l'image de  $\alpha^* : \text{Pic}(V) \rightarrow \text{Pic}(W)$ . En passant au dual, l'application  $N_1(W)_{\mathbf{Z}} \rightarrow N_1(V)_{\mathbf{Z}}$  n'est pas injective, et le degré du polynôme dans la conjecture de Batyrev ne peut être donné par l'invariant  $b$ .

Lehmann et Tanimoto énoncent alors le raffinement conjectural suivant [LT19, Conjecture 5.4].

**Conjecture 5.1.3.** — Soit  $X$  une variété projective lisse quasi de Fano. Étant donnée une classe numériquement effective  $\alpha \in \text{Nef}_1(X)_{\mathbf{Z}}$ , on note  $h(\alpha)$  le nombre de composantes de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X, \alpha)$  qui paramètrent génériquement des courbes libres.

La fonction  $m \in \mathbf{Z} \mapsto h(m\alpha)$  est bornée pour tout  $\alpha$  par un polynôme  $P(m)$ . Son degré est le plus grand entier  $p$  tel que si  $f : Y \rightarrow X$  est face-contractant et  $\alpha \in f_*(F(Y, f^*L))$ ,

$$p = \dim(F(Y, f^*L)) - \dim f_*(F(Y, f^*L)).$$

**5.2. Espace de Kontsevich.** — On présente ici quelques éléments essentiels pour manipuler les espaces de modules de courbes sur une variété complète. La référence utilisée ici sont les notes de Fulton et Pandharipande [FP96]. Un schéma algébrique est par définition un schéma de type fini sur un corps, ici le corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes.

Si  $X$  est une variété projective lisse et  $\beta$  une classe dans  $H_2(X, \mathbf{Z})$ , on définit  $M_{g,n}(X, \beta)$  comme étant l'ensemble des classes d'isomorphisme d'applications marquées  $(C, p_1, \dots, p_n, \mu)$  sur  $X$  où  $C$  est une courbe projective lisse de genre  $g$ , les points marqués  $p_1, \dots, p_n$  sont distincts et le morphisme  $\mu : C \rightarrow X$  vérifie  $\mu_*([C]) = \beta$  (on dit que  $\mu$  représente  $\beta$ ). Un isomorphisme entre deux applications marquées  $(C, p_1, \dots, p_n, \mu)$  et  $(C', p'_1, \dots, p'_n, \mu')$  est un isomorphisme de schémas  $\tau : C \rightarrow C'$  envoyant  $p_i$  sur  $p'_i$  et vérifiant  $\mu' \circ \tau = \mu$ . On remarque que si  $\beta$  n'est pas la classe d'une courbe sur  $X$ , alors  $M_{g,n}(X, \beta)$  est vide. Le cas du genre zéro est celui qui nous intéressera par la suite, et on constate que si  $X$  ne possède pas de courbes rationnelles, alors  $M_{0,n}(X, \beta)$  est vide. Certaines hypothèses fortes seront donc à faire sur  $X$  (par exemple,  $X$  variété uniréglée). De plus, il est plus aisé d'autoriser certaines irrégularités en travaillant dans le compactifié  $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ , dit *espace de module grossier*.

La première notion dont nous avons besoin est celle de courbe quasi-stable.

**Définition 5.2.1 (Courbe marquée quasi-stable).** — Une courbe *quasi-stable* de genre  $g$  marquée en  $n$  points est la donnée  $(C, p_1, \dots, p_n)$  d'une courbe  $C$  projective connexe, réduite et au plus nodale, de genre arithmétique  $g$ , et de  $n$  points  $p_1, \dots, p_n$  sur celle-ci.

Les déformations de courbes sont ensuite vues comme des familles de courbes.

**Définition 5.2.2 (Famille de courbes).** — Soit  $S$  un schéma algébrique sur  $\mathbf{C}$ . Une *famille sur  $S$  de courbes quasi-stables* de genre  $g$  et marquées en  $n$  points est la donnée d'une application projective et plate  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$  et de  $n$  sections  $p_1, \dots, p_n : S \rightarrow \mathcal{C}$  telles que chaque fibre

$$(\mathcal{C}_s, p_1(s), \dots, p_n(s))$$

est une courbe quasi-stable de genre  $g$  marquée en  $n$  points.

Une *famille sur  $S$  d'applications de courbes quasi-stables* de genre  $g$  et marquées en  $n$  points vers un schéma algébrique  $X$  est la donnée

$$(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, p_1, \dots, p_n, \mu : \mathcal{C} \rightarrow X)$$

où  $(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, p_1, \dots, p_n)$  est une famille de courbes quasi-stables sur  $S$  et  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow X$  un morphisme de schémas.

Dans la suite on utilisera l'abréviation «courbe  $n$ -marquée» pour signifier «courbe marquée en  $n$  points». Deux familles sur  $S$  sont dites *isomorphes* s'il existe un morphisme de schémas  $r : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  tel que  $\pi = \pi' \circ r$ ,  $p'_i = r \circ p_i$  et  $\mu = \mu' \circ r$ . Lorsque  $S = \text{Spec}(\mathbf{C})$  et  $\pi$  est le morphisme de structure, on l'omet dans la notation.

Un point spécial d'une composante  $E$  d'une courbe quasi-stable  $C$  est un point marqué ou point d'intersection de composantes appartenant à  $E$ .

**Définition 5.2.3.** — Une application  $(C, p_1, \dots, p_n)$  d'une courbe quasi-stable de genre  $g$  et  $n$ -marquée vers  $X$  est dite *stable* si toute composante  $E \subset C$  vérifie les deux conditions suivantes.

- Si  $E \cong \mathbf{P}^1$  et  $\mu$  envoie  $E$  sur un point, alors  $E$  doit contenir au moins trois points spéciaux.
- Si  $E$  est de genre 1 et  $\mu$  envoie  $E$  sur un point, alors  $E$  doit contenir au moins un point spécial.

Une famille d'applications pointées est dite *stable* si l'application pointée induite sur chaque fibre l'est.

**Remarque 5.2.4.** — La condition de stabilité équivaut à la finitude du groupe d'automorphismes de la courbe [FP96, Lemme 6].

Soit  $X$  un schéma projectif algébrique sur  $\mathbf{C}$ , et  $\beta$  une classe dans  $H_2(X, \mathbf{Z})$ . On définit un foncteur contravariant de la catégorie des schémas algébriques sur  $\mathbf{C}$  vers la catégorie des ensembles en associant, à un schéma  $S$ , l'ensemble des classes d'isomorphismes sur  $S$  de familles stables d'applications de courbes  $n$ -marquées de genre  $g$ , vers  $X$ , et représentant  $\beta$ . On note ce foncteur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ .

À présent il est possible d'énoncer le théorème d'existence de l'espace des modules des applications stables vers un schéma  $X$  algébrique sur  $\mathbf{C}$ . Il est attendu que celui-ci vérifie une propriété universelle, laquelle servira à définir les applications canoniques d'évaluation en les points marqués d'une classe de courbes, utiles par la suite. La construction, admise ici, est exposée dans [FP96].

**Théorème 5.2.5** ([FP96, Théorème 1]). — *Soit  $X$  un schéma projectif algébrique sur  $\mathbf{C}$ , et  $\beta$  une classe dans  $H_2(X, \mathbf{Z})$ .*

*Il existe un espace de module grossier pour le foncteur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ , c'est-à-dire un schéma projectif  $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ , muni d'une transformation naturelle de foncteurs*

$$\phi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta))$$

*satisfaisant les deux propriétés suivantes.*

- $\phi(\mathrm{Spec}(\mathbf{C}))$  est une bijection entre ensembles, autrement dit, les points complexes de  $\overline{M}_{g,n}$  paramètrent les classes d'isomorphismes de courbes stables sur  $\mathbf{C}$ .
- *Universalité.* Si  $Z$  est un schéma et

$$\psi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(*, Z)$$

*une transformation naturelle, alors il existe un unique morphisme de schémas  $\gamma : \overline{M}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow Z$  tel que la transformation naturelle induite*

$$\tilde{\gamma} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(*, Z)$$

*rende commutatif le diagramme de transformations naturelles suivant.*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)) \\ \downarrow \psi & & \swarrow \tilde{\gamma} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(*, Z) & & \end{array}$$

**Définition 5.2.6 (Morphismes d'évaluation).** — Pour tout schéma  $S$  algébrique sur  $\mathbf{C}$  et  $\zeta = (\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, p_1, \dots, p_n, \mu)$  famille de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)(S)$ , la composée

$$\theta_i(S)(\zeta) = \mu \circ p_i \in \mathrm{Hom}(S, X)$$

définit une transformation naturelle  $\theta_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \mathrm{Hom}(*, X)$ . On définit l'évaluation canonique  $\rho_i : \overline{M}_{g,n} \rightarrow X$  comme étant l'unique morphisme de schémas induit par  $\theta_i$ , d'après la propriété universelle du Théorème 5.2.5.

**5.3. Chaînes de courbes libres.** — Nous allons à présent travailler dans l'espace de module grossier  $\overline{M}_{0,0}(X)$ , union disjointe des  $\overline{M}(X, \beta)$ , et plus généralement les espaces  $\overline{M}_{0,n}$  qui paramètrent des courbes stables que l'on peut voir comme des chaînes de courbes rationnelles s'intersectant transversalement et marquées en  $n$  points distincts lisses. Chaque composante d'une telle courbe stable contient aux moins trois points spéciaux (points marqués ou nœuds d'intersection entre composantes).

**Remarque 5.3.1.** — L'application  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X) \rightarrow \overline{M}_{0,0}(X)$  est le quotient par  $\text{Aut } \mathbf{P}^1 = \text{PGL}_2(\mathbf{C})$ . Pour passer d'une composante de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  (paramétrant des morphismes non-constants) à une composante de  $\overline{M}_{0,0}(X)$ , on retranche donc 3 à la dimension attendue.

Une composante  $M$  de  $\overline{M}_{0,0}(X)$ , dont on supposera toujours qu'elle paramètre génériquement des courbes libres, est munie d'une unique structure de variété réduite. On notera  $U \subset M$  le lieu des courbes libres et  $M'$  l'unique composante de  $\overline{M}_{0,1}(X)$  qui paramètre un point marqué sur une courbe de  $M$ . On désignera par  $M''$  l'analogue dans  $\overline{M}_{0,2}(X)$ .

**Définition 5.3.2.** — Une chaîne de courbes rationnelles de longueur  $r$  est une courbe  $C$  stable sans point marqué dont les composantes irréductibles  $C_1, \dots, C_r$  sont des courbes rationnelles, telles que pour tout  $0 \leq i \leq r-1$ ,  $C_{i+1}$  intersecte transversalement  $C_1 \cup \dots \cup C_i$  en un seul point. Une *chaîne de courbes libres* de longueur  $r$  sur  $X$  est une application stable  $f : C \rightarrow X$  telle que  $C$  est une chaîne de courbes rationnelles avec  $r$  composantes et que chaque  $C_i$  se réalise à travers  $f$  comme courbe libre sur  $X$ .

Une chaîne de courbes libres est un point régulier de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  [Kol96, Section II.3].

*Paramétrer les chaînes de courbes libres.* — Les chaînes de courbes libres de longueur  $r$  peuvent être paramétrées par le produit fibré suivant :

$$M'_1 \times_X M''_2 \times_X \dots \times_X M'_r$$

lorsque la courbe  $C_i$  appartient à la composante  $M_i$ , laquelle paramètre génériquement des courbes libres. En effet, on utilise l'axiome de partition ([KM94, 2.2.6 *splitting*]) : si  $g_1, g_2$  sont des genres de courbe fixés,  $n_1$  et  $n_2$  des entiers positifs, tels que  $g = g_1 + g_2$ ,  $n = n_1 + n_2$  et  $n_i + 2g_i - 2 \geq 0$ ,  $S = S_1$  et  $S_2$  deux sous-ensembles complémentaires de  $\{1, \dots, n\}$  respectivement de cardinal  $n_1$  et  $n_2$ , il existe une application canonique

$$\overline{M}_{g_1, n_1+1}(X) \times_X \overline{M}_{g_2, n_2+1}(X) \rightarrow \overline{M}_{g, n}(X)$$

envoyant deux courbes marquées  $(C_i, (x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i+1}^{(i)}))$  sur leur union  $C_1 \cup C_2$  en identifiant  $x_{n_1+1}^{(1)}$  avec  $x_1^{(2)}$ , en numérotant les points marqués restant de l'unique façon conservant leur ordre relatif et de telle sorte que les points de  $C_i$  sont numérotés par  $S_i$ .

Ainsi, dans notre situation, on a un morphisme

$$\overline{M}_{0,1}(X) \times_X \overline{M}_{0,2}(X) \times_X \dots \times_X \overline{M}_{0,2}(X) \times_X \overline{M}_{0,1}(X) \longrightarrow \overline{M}_{0,0}(X)$$

donné par les injections successives

$$\begin{aligned} & \overline{M}_{0,1}(X) \times_X \underbrace{\overline{M}_{0,2}(X) \times_X \dots \times_X \overline{M}_{0,2}(X)}_{r-2} \times_X \overline{M}_{0,1}(X) \longrightarrow \dots \\ & \dots \longrightarrow \overline{M}_{0,1}(X) \times_X \underbrace{\overline{M}_{0,2}(X) \times_X \dots \times_X \overline{M}_{0,2}(X)}_{r-3} \times_X \overline{M}_{0,1}(X) \longrightarrow \dots \\ & \dots \longrightarrow \dots \longrightarrow \overline{M}_{0,1}(X) \times_X \overline{M}_{0,2}(X) \times_X \overline{M}_{0,1}(X) \longrightarrow \overline{M}_{0,1}(X) \times_X \overline{M}_{0,1}(X) \longrightarrow \overline{M}_{0,0}(X) \end{aligned}$$

Ce morphisme paramètre des chaînes. On peut dès lors imposer la provenance de chacune des composantes d'une chaîne, c'est-à-dire considérer la restriction

$$M'_1 \times_X M''_2 \times_X \dots \times_X M''_{r-1} \times_X M'_r \longrightarrow \overline{M}_{0,0}$$

pour des composantes  $M_i$  données de  $\overline{M}_{0,0}(X)$ .



*Composantes principales.* —

**Définition 5.3.3.** — Étant données des composantes  $M_1, \dots, M_r$  de  $\overline{M}_{0,0}(X)$ , paramétrant génériquement des courbes libres, une composante du produit fibré

$$M'_1 \times_X M''_2 \times_X \dots \times_X M''_{r-1} \times_X M'_r$$

est dite *principale* si chaque projection sur  $M'_1$ ,  $M''_i$  et  $M'_r$  est dominante.

Autrement dit, les composantes principales du produit fibré ci-dessus sont celles qui paramètrent génériquement des chaînes de courbes libres. Ces composantes ont la dimension attendue

$$-K_X \cdot C + \dim(X) - 2 - r.$$

**Lemme 5.3.4.** — *Soit*

$$N \subset U''_1 \times_X U''_2 \times_X \dots \times_X U''_r$$

*une composante ouverte paramétrant des  $r$ -chaînes de courbes libres avec un point marqué à chaque extrémité.*

*Alors chaque projection  $N \rightarrow U''_j$  est fidèlement plate. De plus, les morphismes d'évaluation du premier et du dernier point marqué  $N \rightarrow X$  sont également fidèlement plats.*

*Démonstration.* — La preuve de ce lemme se fait par récurrence sur la longueur de la chaîne. Une chaîne de longueur 1 est une courbe libre et le premier point est évident, par définition de la composante choisie. De plus, le choix de trois points marqués sur une courbe rationnelle détermine un élément de  $\text{Aut}(\mathbf{P}^1)$  et l'ouvert  $U''' \subset \overline{M}_{0,3}(X)$  peut donc ainsi être identifié à un ouvert  $U \subset \text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ . Par [Kol96, Corollaire II.3.5.4], le morphisme d'évaluation pour le second point marqué est plat, de même que celui du premier point. Ce morphisme se factorise à travers l'oubli du dernier point  $U''' \rightarrow U''$ , lequel est fidèlement plat. L'évaluation sur  $U''$  est donc bien fidèlement plate.

On suppose à présent le lemme prouvé pour les chaînes de  $r-1$  courbes libres, avec  $r \geq 2$ , et on se donne  $N \subset U''_1 \times_X U''_2 \times_X \dots \times_X U''_r$  comme dans l'énoncé. L'image de  $N$  par la projection (ouverte)  $U''_1 \times_X \dots \times_X U''_r \rightarrow U''_1 \times_X \dots \times_X U''_{r-1}$  est une composante ouverte  $Q$  de  $U''_1 \times_X \dots \times_X U''_{r-1}$ , qui par l'hypothèse de récurrence vérifie les deux assertions du lemme. Il n'y a donc qu'à vérifier que  $N \rightarrow U''_r$  et le morphisme  $N \rightarrow X$  du dernier point marqué sont fidèlement plats. De même, d'après l'initialisation de la récurrence, le morphisme d'évaluation  $U''_r \rightarrow X$  du premier point marqué est fidèlement plat. À présent, la situation est celle résumée par le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} Q \times_X U''_r & \xrightarrow{\pi_r} & U''_r \\ \downarrow \pi_Q & & \downarrow \\ Q & \longrightarrow & X \end{array}$$

Les composantes de  $Q \times_X U''_r$  paramètrent des chaînes de courbes libres, elles ont donc toutes même dimension (qui est celle attendue). Par ailleurs, par changement de base, les projections  $\pi_Q$  et  $\pi_r$  sont aussi fidèlement plates et leurs fibres ont donc toutes même dimension. Il suffit donc qu'une composante de  $Q \times_X U''_r$  domine  $Q$  pour que toute composante domine également  $Q$ . Une telle composante est donnée par l'opération de recollement d'une chaîne de courbes libres générale dans  $Q$  par une courbe libre de  $U_r$  [KM94, 2.2.6 *splitting*]. Enfin, il reste à voir que  $N$  s'identifie à une composante de  $Q \times_X U''_r$  : leurs dimensions sont égales. On a vu que  $Q \times_X U''_r \rightarrow U''_r$  était fidèlement plat, il vient donc par composition que  $N \rightarrow U''_r$  est fidèlement plat. Il en va de même pour le morphisme  $N \rightarrow X$  d'évaluation du dernier point marqué. Un diagramme similaire permet de traiter le cas du premier point marqué. La récurrence se propage et le lemme est prouvé.  $\square$

À présent, étant donné un fermé strict quelconque de  $X$ , nous allons montrer que si l'on fixe le premier point marqué pour une composante de chaînes de courbes libres, en général le dernier point marqué évite ce fermé.

**Lemme 5.3.5.** — *Soit*

$$N \subset M_1'' \times_X M_2'' \times_X \dots \times_X M_r''$$

*une composante principale paramétrant des  $r$ -chaînes de courbes libres avec un point marqué à chaque extrémité. Soit  $Z$  un fermé propre de  $X$ . On note  $\rho_1 : N \rightarrow X$  le morphisme d'évaluation du premier point marqué, et  $F$  la fibre de  $\rho_1$  au dessus d'un point général de  $X$ . Alors toute composante de  $F$  paramètre génériquement une chaîne de courbes libres  $C$  telles que l'image du morphisme  $C \rightarrow X$  d'évaluation du dernier point marqué ne rencontre par  $Z$ .*

*Démonstration.* — À nouveau, ce lemme se prouve par récurrence sur la longueur de la chaîne. Considérons une composante principale  $N \subset M_1''$ , par définition (dominance et propreté de  $N \rightarrow M_1''$ ) on a en réalité égalité et on considère donc  $\rho_1 : M_1'' \rightarrow X$ . Les courbes réductibles de classe  $\beta$  correspondent au bord de  $\overline{M}_{0,2}(X, \beta)$  [FP96, Définitions 6.1] et forment un lieu de codimension 1 dans cet espace. Une composante d'une fibre générale de  $\rho_1$  contient donc des courbes irréductibles. Par les Propositions 2.2.3 et 2.2.4 et la Remarque 2.2.6, il existe un fermé de  $X$  contenant toute courbe non-libre paramétrée par  $M_1$ , et toute composante d'une fibre de  $\rho_1$  au dessus d'un point général de  $X$  contient des courbes libres irréductibles. La courbe génériquement paramétrée par  $M_1''$  étant libre, la pré-image  $U$  de  $X \setminus Z$  par  $\rho_2$  est un ouvert non vide de  $M_1''$ . De même, l'évaluation  $\rho_1 : M_1'' \rightarrow X$  du premier point marqué est fidèlement plate par le Lemme 5.3.4 et  $\rho_1(U)$  est un ouvert de  $X$ , dont les fibres vérifient l'énoncé du lemme.

On suppose à présent le résultat prouvé pour les chaînes de longueur  $r - 1$  et on se donne une composante principale  $N \subset M_1'' \times_X M_2'' \times_X \dots \times_X M_r''$ . À nouveau, l'image de  $N$  par la projection sur les  $r - 1$  premières composantes est une composante  $Q$  qui satisfait l'hypothèse de récurrence. À nouveau par les Propositions 2.2.3 et 2.2.4 et la Remarque 2.2.6, il existe un fermé  $W \subset X$  tel que pour toute composante  $C'$  d'une courbe paramétrée par  $M_r''$ , si  $W$  ne contient pas  $C'$  alors  $\mathbf{P}^1 \rightarrow C' \rightarrow X$  est libre.

Notons  $\tilde{\rho}_1 : Q \times_X M_r'' \rightarrow X$  l'évaluation induite par le premier point marqué de  $Q$ . Une fibre de  $\tilde{\rho}_1$  est donnée par un produit  $F \times_X M_r''$  où  $F$  est une fibre de l'évaluation sur le premier point  $Q \rightarrow X$ . Une composante d'une fibre  $F \times_X M_r''$  au dessus d'un point fermé  $x \in X \setminus W$  contient alors une chaîne de courbes libres. On rappelle alors que  $N$  est une composante de  $Q \times_X M_r''$ . On a donc montré la première partie du lemme pour  $\tilde{\rho}_1 : N \rightarrow X$ . On note  $\rho_{r,1}$  et  $\rho_{r,2}$  les morphismes d'évaluation associés à  $M_r''$ . À nouveau, le Lemme 5.3.4 nous assure que  $\rho_{r,1}$  est fidèlement plat. Pour éviter  $Z$  avec le dernier point marqué, il suffit que le premier point marqué de  $M_r''$  tombe dans l'ouvert  $\rho_{r,1}(\rho_{r,2}^{-1}(F))$ . Autrement dit, le dernier point marqué de  $F$  doit éviter le complémentaire de  $\rho_1(\rho_2^{-1}(F))$ . C'est tout à fait possible par l'hypothèse de récurrence.  $\square$

*Cassure de chaînes libres.* — Le résultat qui se révélera le plus utile - notamment dans l'étude des volumes de Fano - est le suivant.

**Lemme 5.3.6.** — *Soit  $N$  une composante principale du produit fibré  $M_1' \times_X M_2'' \times_X \dots \times_X M_{r-1}'' \times_X M_r'$  paramétrant génériquement des chaînes de courbes libres. Supposons que les courbes paramétrées par  $M_j$  peuvent être dégénérées en une chaîne de deux courbes libres dans un produit  $\tilde{M}_j' \times_X \hat{M}_j''$ . Alors  $N$  contient une composante principale du produit global*

$$M_1' \times_X M_2'' \times_X \dots \times_X \tilde{M}_j'' \times_X \hat{M}_j'' \times_X \dots \times_X M_{r-1}'' \times_X M_r'$$

*Démonstration.* — Par la définition de composante principale, la projection  $N \rightarrow M_j''$  est dominante et donc surjective puisqu'elle est par ailleurs propre. Par l'hypothèse de déformation,  $N$  contient un point de

$$M_1' \times_X M_2'' \times_X \dots \times_X \tilde{M}_j'' \times_X \hat{M}_j'' \times_X \dots \times_X M_{r-1}'' \times_X M_r'.$$

Les chaînes de courbes libres sont des points lisses de  $\overline{M}_{0,0}(X)$ . Si ce point en est une, alors  $N$  contient une composante paramétrant des  $(r+1)$ -chaînes libres. Or  $N \rightarrow M_j''$  est surjective : l'existence d'une courbe paramétrée par  $N$  contenant une 2-chaîne libre donnée et paramétrée par  $\tilde{M}_j'' \times_X \hat{M}_j''$  est donc assurée. Par le Lemme 5.3.5, et puisque les composantes de la 2-chaîne sont libres, on peut choisir pour le premier et dernier points marqués des points généraux de  $X$  donne une fibre dans  $N$  qui paramètre génériquement des  $(r+1)$ -chaînes libres : les composantes de la fibre de  $N$  sont alors données par les composantes du produit de  $G_1 \subset M_1' \times_X M_2'' \times_X \dots \times_X M_{j-1}''$  avec  $G_2 \subset M_{j+1}'' \times_X M_2'' \times_X \dots \times_X M_r'$  où  $G_1$  et  $G_2$  sont les fibres respectivement du dernier et premier point marqué pour ce choix de point. On applique le Lemme 5.3.5 à l'une et l'autre de ces fibres.  $\square$

*Type combinatoire d'une chaîne libre.* — Gardons à l'esprit que notre but est de compter les composantes principales. Or, permuter les composantes d'une chaîne libre ne change pas la composante paramétrant celle-ci : grossièrement, il est possible de déformer une chaîne en changeant l'ordre des courbes.

**Définition 5.3.7.** — Soit  $f : C \rightarrow X$  une  $r$ -chaîne libre. On appelle *type combinatoire* l'application  $f^\dagger : \{1, \dots, r\} \rightarrow \pi_0(\overline{M}_{0,0}(X))$  qui à un entier  $i$  associe l'unique composante de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  paramétrant la  $i$ -ème composante de la chaîne.

**Lemme 5.3.8.** — Soit  $X$  une variété projective lisse et  $M$  une composante de  $\overline{M}_{0,0}(X)$ . Supposons qu'il existe un point de  $M$  qui paramètre une  $r$ -chaîne libre  $f : C \rightarrow X$  de type combinatoire  $f^\dagger$ . Alors pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, r\}$ ,  $M$  contient également un point paramétrant une chaîne de type combinatoire  $f^\dagger \circ \sigma$ .

*Démonstration.* — Donnons-nous  $f : C \rightarrow X$  une  $r$ -chaîne libre paramétrée par  $M$ . Puisque les transpositions  $(i, i+1)$  génèrent l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, r\}$ , il suffit de prouver le lemme pour une chaîne obtenue en permutant deux composantes voisines, que l'on note  $T_1$  et  $T_2$ . On note également  $S_1$  et  $S_2$  les deux chaînes (éventuellement vides) correspondant au complémentaire de  $T_1 \cup T_2$  dans  $C$ . L'intersection de  $T_1$  et  $T_2$  est envoyée par  $f$  sur un point  $x \in X$  que l'on peut supposer général, quitte à déformer  $f$ .

Fixons à présent  $T_1$  et  $T_2$ , et déformons  $S_1$  et  $S_2$ , tout en gardant un point d'intersection respectivement avec  $T_1$  et  $T_2$ , en deux courbes  $S_1'$  et  $S_2'$  contenant le point  $x$ . Ces deux courbes sont des chaînes libres. Le résultat de cette déformation est une courbe stable  $g : D \rightarrow X$  donnée par une courbe rationnelle  $Z$  contractée par  $g$  vers  $x$  et attachée par ce point aux chaînes libres  $S_1', T_1, T_2$  et  $S_2'$ .

Justifions que cette courbe stable  $g$  est un point lisse de  $M$ . Pour cela suffit de vérifier que  $H^1(D, g^*T_X) = 0$ . L'argument est donné dans [Tes06, Lemme 1.5 & Corollaire 1.6] : les contributions successives au  $H^1(D, g^*T_X)$  de  $S_1', T_1, T_2$  et  $S_2'$  sont nulles, et on a

$$h^1(D, g^*T_X) = h^1(Z, (g^*T_X)|_Z) = 0$$

puisque  $g$  contracte  $Z$  en un point.

Mais  $g : D \rightarrow X$  peut à nouveau être déformée en une  $r$ -chaîne  $S_1'' \cup T_2 \cup T_1 \cup S_2''$  où  $S_1''$  et  $S_2''$  sont des déformations de  $S_1'$  et  $S_2'$ , ce qui nous donne une  $r$ -chaîne libre du type combinatoire attendu, et prouve le lemme.  $\square$

**5.4. Une borne polynomiale pour certaines composantes.** — Fixons un entier  $q$  strictement positif. En ne considérant que des courbes de  $L$ -degré au plus  $q$ , il est possible de contrôler le nombre de composantes de  $\overline{M}_{0,0}(X, d)$  de degré  $d$  sur  $-K_X$ , en un polynôme en  $d$ .

**Théorème 5.4.1.** — *Soit  $X$  une variété projective lisse et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Soit  $q$  un entier strictement positif et  $\mathcal{N} = \{M_i\}_{i \in I}$  un ensemble de composantes (deux à deux distinctes) de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  paramétrant génériquement des courbes libres de  $L$ -degré borné par  $q$ .*

*Pour tout entier  $d$  strictement positif, considérons  $h(d)$  le nombre de composantes de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  contenant une chaîne libre de  $L$ -degré total  $d$  et dont chacune des courbes libres la constituant est paramétrée par une composante de  $\mathcal{N}$ .*

*Alors il existe un polynôme  $P$  à coefficients entiers tel que  $n(d) \leq P(d)$  pour tout  $d > 0$ .*

*Démonstration.* — Notons que puisque

$$\overline{M}_{0,0}(X) = \sqcup_{d \geq 0} \overline{M}_{0,0}(X, d)$$

et que  $\overline{M}_{0,0}(X, d)$  est noethérien pour tout  $d$ , il n'y a qu'un nombre fini de composantes de  $L$ -degré inférieur ou égal à  $q$ , et donc l'ensemble d'indices  $I$  est fini. Pour tout  $i \in I$ , on note  $s_i : M_i' \rightarrow X$  la famille universelle donnée par l'évaluation du point marqué, et on se donne  $\tilde{M}_i' \rightarrow M_i'$  une résolution des singularités. Par propreté, on peut considérer la factorisation de Stein associée à la composée  $s_i' : \tilde{M}_i' \rightarrow X$  :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_i' & \longrightarrow & M_i' \xrightarrow{s_i} X \\ & \searrow & \nearrow g_i \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

On note  $e_i$  le degré du morphisme fini  $g_i$ . Dans le cas où celui-ci est de degré 1, puisqu'une fibre générale de  $s_i'$  est irréductible, il en va de même pour une fibre générale de  $s_i$ . On pose finalement

$$e = \sup_{i \in I} e_i$$

et on raisonne par récurrence sur  $e$ .

On suppose d'abord  $e = 1$ . Soit  $M \subset \overline{M}_{0,0}(X, d)$  une composante paramétrant une chaîne libre de degré total  $d$ , dont les courbes irréductibles sont paramétrées par des composantes de  $\mathcal{N}$ . Le point paramétrant cette chaîne est un point lisse de  $M$ . Compter les composantes  $M$  revient donc à compter les composantes de tous les espaces de paramètres

$$M_{i_1}' \times_X M_{i_2}'' \times_X \dots \times_X M_{i_{r-1}}'' \times_X M_{i_r}'$$

pour un entier  $r$  et  $i_1, \dots, i_r \in I$ , de degré total  $d$ . Mais on a supposé  $e_i = 1$  pour tout  $i \in I$ , donc chaque  $M_i'$  (ou  $M_i''$ ) est irréductible et ces produits sont tous irréductibles. De plus, le Lemme 5.3.8 nous assure que l'ordre du choix n'importe pas. Nous sommes donc ramenés à compter le nombre de façons de choisir de façon non-ordonnée et avec remise, des composantes dont le degré total est  $d$ . On note  $Q(d, r)$  le nombre de façon de choisir ainsi  $r$  composantes. La borne dont il est question est donc  $\sum_r Q(d, r)$ . On montre aisément par un calcul direct ou une récurrence sur  $|I|$  que ce nombre est un polynôme en  $d$ .

Supposons à présent que  $e > 1$ . Soient  $Z$  une variété lisse et  $g : Z \rightarrow X$  un morphisme dominant et génériquement fini de degré supérieur ou égal à 2. On note  $\mathcal{N}_Z$  l'ensemble des composantes  $M$  de  $\mathcal{N}$  telles qu'il existe une factorisation rationnelle

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow \text{---} & \nearrow \\ & & Z \end{array}$$

et on note  $U'$  l'ouvert de définition de  $M' \dashrightarrow Z$ . Cet ouvert contient toute fibre générale de l'oubli  $\rho_1 : M' \rightarrow M$ . On obtient ainsi une famille de courbes libres paramétrées par un ouvert  $U$  de  $M$ . De plus, une courbe générale de  $U$  peut se déformer pour éviter le lieu de ramification de  $Z \rightarrow X$  et finalement  $M$  est birationnelle à une composante de  $\overline{M}_{0,0}(Z)$  dont le  $g^*L$ -degré est strictement plus petit que le  $L$ -degré de  $M$ . Par le Lemme 5.4.2 ci-dessous, il n'existe qu'un nombre fini de  $g$  tels que  $\mathcal{N}_Z$  est non-vide. Par l'hypothèse de récurrence, le nombre de composantes de  $\overline{M}_{0,0}(Z, d)$  provenant de recollement de courbes de  $\mathcal{N}_Z$  et de  $g^*L$ -degré borné par  $q$  est majoré par un polynôme  $P_Z$  en ce degré. Finalement, ce polynôme majore le nombre de composantes formées à partir de  $\mathcal{N}_Z$ .

L'idée à présent est de compter grossièrement les composantes principales de degré  $d$  formées à partir de  $\mathcal{N}$ , en fonction de leur factorisation à travers un tel  $Z$ . Expliquons pourquoi nous allons fabriquer au moins une fois chacune des composantes principales. Si  $M$  est une composante paramétrant génériquement des courbes libres d'un certain produit fibré

$$M'_1 \times_X M''_2 \times_X \dots \times_X M''_{k-1} \times_X M'_k$$

on peut toujours choisir par le Lemme 5.3.8 l'ordre de ce produit comme l'on veut, et construire  $M$  par recollements successifs. Nous avons déjà traité le cas où tous les  $M_i$  ont une résolution dont la factorisation de Stein est triviale. On suppose donc que ce n'est pas le cas. Alors il existe un  $g : Z \rightarrow X$  génériquement fini et dominant tel que l'un des  $M'_i \rightarrow X$  se factorise rationnellement à travers  $g$ . On peut donc construire une composante  $M$  en commençant par les courbes issues de  $\mathcal{N}_Z$ .

La difficulté réside dans le fait que le recollement avec les courbes restantes peut fournir non pas une, mais plusieurs composantes du produit fibré associé, et que nous n'avons alors aucun contrôle sur leur nombre. La remarque suivante permet alors de poursuivre le recollement. Supposons que  $Q_1$  et  $Q_2$  soient des composantes de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  paramétrant génériquement des courbes libres, que  $\tilde{Q}_1$  soit une résolution de  $Q_1$  et que la factorisation de Stein de  $\tilde{Q}'_1 \rightarrow Q'_1 \rightarrow X$  soit de degré 1. Alors la fibre générale de  $Q'_1 \times_X Q'_2 \rightarrow Q'_2$  est irréductible, tout comme  $Q'_2$ , et donc  $Q'_1 \times_X Q'_2$  est irréductible et paramètre des 2-chaînes libres. Cette remarque s'applique à notre situation, car toute chaîne libre peut être lissée en une courbe libre [Kol96, Théorème II.7.6] et donc toute composante paramétrant une chaîne libre paramètre génériquement des courbes libres. Il faut donc recoller avec une composante telle que (une résolution de) la famille universelle admette une factorisation de Stein triviale, c'est-à-dire de degré 1. N'importe quelle composante de  $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_Z$  convient.

Fixons à présent un entier  $\delta > 0$ , et comme ci-avant  $Z$  une variété lisse ainsi que  $g : Z \rightarrow X$  un morphisme dominant et génériquement fini de degré supérieur ou égal à 2. Considérons toutes les composantes principales de l'espace

$$M'_1 \times_X M''_2 \times_X \dots \times_X M''_{k-1} \times_X M'_k$$

paramétrant les  $k$ -chaînes libres, pour tout entier  $k \geq 1$  et  $M_i$  des composantes de  $\mathcal{N}$ , qui satisfont la propriété suivante. Il existe un entier  $\ell = \ell(Z, \delta) \geq 1$  tel que :

- la composante  $M(\ell)$  de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  résultant du recollement des  $\ell$  premières courbes paramètre des courbes de degré  $\delta$ , ces  $\ell$  premières courbes étant issues de composante de  $\mathcal{N}_Z$  ;
- mais si  $M(\ell + 1)$  désigne une composante obtenue par le recollement des  $\ell + 1$  premières courbes, la composée  $\tilde{M}(\ell + 1) \rightarrow X$  d'une résolution par la famille universelle possède une factorisation de Stein de degré 1, c'est-à-dire que  $\ell$  est maximal.

Il existe au plus  $P_Z(\delta)$  composantes  $M(\ell)$  possibles. Pour recoller une courbe libre de plus et former une  $(\ell + 1)$ -chaîne, il y a au plus  $e$  choix possibles, ce qui donne au maximum  $eP_Z(\delta)$  composantes obtenues ainsi. Mais par l'hypothèse sur le degré de la factorisation de Stein, une fibre générale de la famille universelle correspondante est irréductible.

On peut donc former une et une seule composante de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  paramétrant une chaîne libre de degré total  $d$ , à partir de la  $(\ell + 1)$ -chaîne de degré  $\delta + d_{\ell+1}$ , par recollement des  $(k - \ell - 1)$  courbes restantes, celles-ci étant choisies dans  $\mathcal{N}$  avec remise et sans ordre par le Lemme 5.3.8. Si l'on note  $(x)_+ = \max(x, 0)$  la partie positive, le nombre de façons de choisir ces composantes est  $Q((d - \delta - d_{\ell+1})_+, (k - \ell - 1)_+)$ . Le nombre de composantes de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  paramétrant une chaîne de courbes libres paramétrées par des composantes de  $\mathcal{N}$  est donc majoré par

$$\sum_Z \sum_{\delta=1}^d \sum_{k=1}^d e \cdot Q((d - \delta - d_{\ell+1})_+, (k - \ell - 1)_+) \cdot P_Z(\delta)$$

On peut alors faire une majoration grossière  $Q((d - \delta - d_{\ell+1})_+, (k - \ell - 1)_+) \leq Q(d, k)$  pour constater que cette majoration est polynomiale en  $d$ .  $\square$

La preuve du théorème fait usage du lemme suivant.

**Lemme 5.4.2.** — *Soit  $X$  une variété projective lisse et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . Fixons un entier positif  $q$  comme dans le Théorème 5.4.1. Notons  $\mathcal{Z}$  l'ensemble des morphismes  $f : Z \rightarrow X$  génériquement finis et dominants vérifiant la propriété suivante : il existe une composante  $T \subset \overline{M}_{0,0}(Z)$  paramétrant génériquement des courbes libres de  $f^*L$ -degré inférieur ou égal à  $q$ , telle que*

$$T \xrightarrow{f^*} \overline{M}_{0,0}(X)$$

*induit un morphisme dominant et birationnel sur une composante de  $\overline{M}_{0,0}(X)$ .*

*Alors l'ensemble des classes d'équivalence birationnelle de  $\mathcal{Z}$  est fini.*

*Démonstration.* — Soient  $f$  et  $T$  vérifiant les hypothèses du lemme. Par le degré, seul un nombre fini de composantes  $M$  de  $\overline{M}_{0,0}(X)$  peuvent être l'adhérence de l'image de  $T \rightarrow \overline{M}_{0,0}(X)$  ; on s'en donne une. La composante  $M$  paramètre génériquement des courbes libres, on note  $\rho : M' \rightarrow X$  la famille universelle et  $h : \tilde{Z} \rightarrow X$  la factorisation de Stein d'une résolution de  $\rho$ .

Si  $\rho$  se factorise rationnellement à travers  $f : Z \rightarrow X$  génériquement fini et dominant, c'est-à-dire s'il existe une composante  $T$  de  $\overline{M}_{0,0}(Z)$  vérifiant les hypothèses du lemme, alors il en va de même pour la factorisation de Stein  $h$ , la résolution étant un morphisme birationnel.  $\square$

## 6. Conjecture de Manin géométrique

On s'intéresse dans cette section au cas dit *rigide*, c'est-à-dire lorsque  $\kappa(K_X + a(X, L)L) = 0$ . Dans celui-ci,  $K_X + a(X, L)L$  tombe sur le bord du cône pseudo-effectif et ses multiples effectifs n'ont qu'une seule section à une constante multiplicative près. Notamment, si  $X$  est quasi de Fano et  $L = -K_X$ , nous nous trouvons dans cette situation.

### 6.1. Index rationnel et constante $\alpha$

**Définition 6.1.1 (Index rationnel).** — Soit  $X$  une variété projective lisse et uniréglée, et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . L'*index rationnel*  $r(X, L)$  est par définition

$$r(X, L) = \min\{L \cdot \alpha \mid \alpha \in N_1(X)_{\mathbf{Z}}\} \in \mathbf{Q}.$$

Sous les mêmes hypothèses, notons provisoirement  $V$  le sous-espace de  $N_1(X)$  engendré par la face  $F(X, L)$ , et  $Q$  l'hyperplan rationnel

$$\{\alpha \in N_1(X) \mid L \cdot \alpha = 0\}.$$

On munit  $Q$  de l'unique mesure normalisée par  $N_1(X)_{\mathbf{Z}}$ . Cette mesure  $dQ$  induit également une mesure sur

$$Q_r = \{\alpha \in V \mid L \cdot \alpha = r\}$$

pour tout rationnel  $r$  positif.

**Définition 6.1.2.** — Soit  $X$  une variété projective lisse et uniréglée, et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ . On définit  $\alpha(X, L)$  comme étant le volume du polytope

$$Q_{r(X, L)} \cap F(X, L)$$

pour la mesure induite par  $dQ$  sur  $Q_{r(X, L)}$ .

Cette constante interviendra dans la conjecture de Manin géométrique.

**6.2. Ensemble mince à retirer et composantes de Manin.** — Afin d'avoir une chance d'obtenir des constantes correctes, nous avons vu que certaines courbes ne devaient pas contribuer, et les résultats présentés jusqu'ici justifient la définition suivante.

**Définition 6.2.1.** — Soit  $X$  une variété projective lisse et uniréglée, et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$  tel que  $\kappa(K_X + a(X, L)L) = 0$ .

Soit  $M$  une composante de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ , dont on note  $\mathcal{C}$  la famille universelle de courbes correspondante et  $s : \mathcal{C} \rightarrow X$  l'application associée. On qualifiera  $M$  de *composante de Manin* si les conditions suivantes sont remplies.

1. Les classes des courbes paramétrées par  $M$  appartiennent à la face  $F(X, L)$ .
2. Le morphisme  $s$  ne se factorise à travers aucun morphisme mince  $f : Y \rightarrow X$  vérifiant  $a(Y, f^*L) > a(X, L)$ .
3. Le morphisme  $s$  ne se factorise à travers aucun morphisme mince et dominant  $f : Y \rightarrow X$  contractant les faces et vérifiant

$$(a(Y, f^*L), b(Y, f^*L)) \geq (a(X, L), b(X, L))$$

pour l'ordre lexicographique.

4. Le morphisme  $s$  ne se factorise à travers aucun morphisme mince et dominant  $f : Y \rightarrow X$  vérifiant  $a(Y, f^*L) = a(X, L)$  et  $\kappa(K_Y + a(Y, f^*L)f^*L) > 0$ .

**6.3. Conjecture forte.** — Dans leur article [LT19], Lehmann et Tanimoto énoncent la conjecture forte suivante.

**Conjecture 6.3.1.** — Soit  $X$  une variété projective lisse uniréglée et  $L$  un nef et gros  $\mathbf{Q}$ -diviseur sur  $X$  tel que  $\kappa(K_X + a(X, L)L) = 0$ .

Pour toute classe de courbe  $\alpha \in \overline{\text{Eff}}_1(X)_{\mathbf{Z}}$  contenue dans l'intérieur de la face  $F(X, L)$  il existe au plus une composante de Manin paramétrant les courbes de classe  $\alpha$ .

Il s'agira plus loin de vérifier la conjecture 6.3.1 pour les variétés de Fano de dimension 3, de rang de Picard 1 et d'index 2. Ces vingt dernières années la conjecture 6.3.1 pour la polarisation anticanonique a été vérifiée dans un certain nombre de cas. Le cas d'une hypersurface générale de  $\mathbf{P}^n$ , de degré inférieur strictement à  $n - 1$  a été traité de façon explicite par Riedl et Yang dans [RY19]. Celui des variétés homogènes apparaît dans les articles de Thomsen [Tho98], Kim et Pandharipande [KP01]. Bourqui a traité le cas des variétés toriques [Bou16]. Enfin, le travail de Testa fournit le résultat pour les surfaces de Del Pezzo [Tes06].

**6.4. Fonction de comptage, vers une conjecture de Manin géométrique.** — Ce qui suit explique l'heuristique obtenue sans considérer précisément les termes d'erreurs introduits. Supposons très temporairement que le corps de base est le corps fini à  $q > 0$  éléments  $\mathbf{F}_q$ . Considérons une composante  $W$  de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ . Une estimée de Lang-Weil du nombre de points de  $W$  serait alors  $q^{\dim(W)}$ . Retournons à présent au cadre géométrique, en supposant à nouveau que  $X$  est une variété projective uniréglée définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$  tel que  $\kappa(K_X + a(X, L)L) = 0$ . On introduit donc la fonction de comptage

$$N(X, L, q, d) = \sum_{i=1}^d \sum_{W \in \text{Man}_i} q^{\dim W}$$

où  $\text{Man}_i$  désigne l'ensemble des composantes de Manin paramétrant des courbes de degré  $ir(X, L)$  sur  $L$ . L'idée est alors de faire tendre  $q$  vers l'infini et de déduire (en partie) de la Conjecture 6.3.1 une conjecture décrivant le comportement asymptotique de  $N(X, L, q, d)$ .

Soit  $i$  un entier positif. Puisque la mesure  $dQ$  est normalisée selon  $N_1(X)_{\mathbf{Z}}$ , une estimée du nombre de classes entières de  $F(X, L)$  de  $L$ -degré  $ir(X, L)$  est donnée par le volume du polytope  $Q_{ir(X, L)} \cap F(X, L)$  lequel vaut

$$\text{vol}(Q_{ir(X, L)} \cap F(X, L)) = \alpha(X, L) i^{b(X, L) - 1}.$$

En supposant qu'à haut degré, une classe entière de  $F(X, L)$  correspond exactement à une composante de Manin, ce même volume devient une estimée du nombre de composantes de Manin paramétrant des courbes de  $L$ -degré  $ir(X, L)$ . Par le Théorème 4.2.5, une telle composante  $W$ , paramétrant des courbes de classe  $\alpha$ , est de dimension

$$\begin{aligned} \dim(W) &= -K_X \cdot \alpha + \dim(X) \\ &= a(X, L)L \cdot \alpha + \dim(X) \\ &= a(X, L)ir(X, L) + \dim(X). \end{aligned}$$

De là, on fait la première approximation

$$\sum_{W \in \text{Man}_i} q^{\dim(W)} \approx \alpha(X, L) i^{b(X, L) - 1} q^{a(X, L)ir(X, L) + \dim(X)}.$$

Lorsque  $q \rightarrow \infty$ , le coefficient du terme dominant de la fonction de comptage  $N(X, L, q, d)$  est  $\alpha(X, L) d^{b(X, L) - 1}$ . On fait alors une nouvelle approximation en ne conservant que ce terme, ce qui



donne simplement pour  $q$  grand

$$\begin{aligned} N(X, L, q, d) &\approx \sum_{i=1}^d \alpha(X, L) i^{b(X,L)-1} q^{a(X,L)ir(X,L)+\dim(X)} \\ &\approx \alpha(X, L) d^{b(X,L)-1} q^{\dim(X)+da(X,L)r(X,L)}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la formulation suivante d'une conjecture de Manin géométrique, semblable à celle formulée par Lehmann et Tanimoto dans [LT19], mais où l'on précise que le degré  $d$  relativement à  $L$  doit être choisi suffisamment grand.

**Conjecture 6.4.1.** — Soit  $X$  une variété projective lisse et  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur nef et gros sur  $X$ , tel que  $\kappa(K_X + a(X, L)L) = 0$ . Alors pour  $d$  fixé suffisamment grand, on a l'équivalent

$$N(X, L, q, d) \sim \alpha(X, L) q^{\dim(X)+da(X,L)r(X,L)} d^{b(X,L)-1}$$

lorsque  $q \rightarrow \infty$ .

**Exemple 6.4.2.** — Soit  $X$  une surface de Del Pezzo de degré au moins 2 et admettant une courbe de degré anticanonique  $(-1)$ . Par [Tes06] et grâce à la classification [LT17, Théorème 6.2] concernant le comportement des invariants  $a$  et  $b$  vis-à-vis des sous-variétés et revêtements de  $X$ , on peut montrer que  $X$  vérifie la Conjecture 6.3.1 et en particulier pour  $q \rightarrow \infty$  on a

$$N(X, -K_X, q, d) \sim \alpha(X, L) q^{d+2} d^{p(X)-1}.$$

**6.5. Borne dans le cas uniréglé.** — Le Théorème 4.2.5 fournit la borne grossière suivante.

**Théorème 6.5.1.** — Soit  $X$  une variété projective lisse uniréglée et soit  $L$  un  $\mathbf{Q}$ -diviseur sur  $X$ , supposé nef et gros, et tel que  $\kappa(K_X + a(X, L)L) = 0$ . Alors pour  $q \rightarrow \infty$ ,

$$N(X, L, q, d) = O\left(q^{da(X,L)r(X,L)+\dim(X)}\right).$$

En particulier, si  $\varepsilon > 0$  et  $d \geq \frac{\dim(X)}{\varepsilon}$  alors

$$N(X, L, q, d) = O\left(q^{d(a(X,L)r(X,L)+\varepsilon)}\right).$$

*Démonstration.* — Les composantes de Manin paramètrent des courbes libres. Or il existe une constante  $c$  telle que le nombre de composantes paramétrant des courbes libres de  $L$ -degré  $\delta$  donné est borné par  $c^\delta$ . Il vient alors par le Théorème 4.2.5 et quelques manipulations

$$\begin{aligned} N(X, L, q, d) &= \sum_{i=1}^d \sum_{W \in \text{Man}_i} q^{\dim(W)} \leq \sum_{i=1}^d c^{ir(X,L)} q^{\dim(X)+a(X,L)r(X,L)i} \\ &\leq q^{\dim(X)} \frac{c^{dr(X,L)} q^{da(X,L)r(X,L)} - 1}{1 - c^{-r(X,L)} q^{-a(X,L)r(X,L)}} \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat. □

## PARTIE III. VOLUMES DE FANO DE RANG 1 ET INDEX 2

Dans cette dernière partie on suppose le corps de base algébriquement clos et de caractéristique nulle.

## 7. Classification, ensemble exceptionnel et composantes

**7.1. Classification de Fano-Iskovskikh.** — Dans la suite de ce mémoire on utilisera la classification de Fano-Iskovskikh des variétés de Fano tridimensionnelles. Celles-ci sont classées selon leur rang de Picard, que l'on suppose dans la suite égal à 1, puis par l'index de  $-K_X$ , c'est-à-dire l'entier  $\iota(X)$  tel que  $-K_X = \iota(X)H$  avec  $H$  générateur ample de  $\text{Pic}(X)$ , et enfin par le  $H$ -degré de  $X$  que l'on note  $d(X)$ , c'est-à-dire  $d(X) = H^3$ .

**Théorème 7.1.1 ([IP99, Section 12.2]).** — *Soit  $X$  une variété de Fano (lisse) de dimension 3, de rang de Picard 1 et d'index 2. Alors  $d(X) \in \{2, 3, 4, 5\}$  et  $X$  est de l'un des types suivants.*

- $d(X) = 2$  : revêtement double de  $\mathbf{P}^3$  ramifié le long d'une surface quartique lisse ;
- $d(X) = 3$  : hypersurface cubique dans  $\mathbf{P}^4$  ;
- $d(X) = 4$  : intersection complète de deux quadriques dans  $\mathbf{P}^5$  ;
- $d(X) = 5$  : section de la grassmannienne  $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbf{P}^9$  par un sous-espace linéaire de codimension 3.

$\overline{M}_{0,n}(X, d)$  désigne l'espace grossier paramétrant les courbes stables  $n$ -marquées dont l'image a un  $H$ -degré  $d$ , où  $H$  est le générateur ample de  $\text{Pic}(X)$ .

**Remarque 7.1.2.** — Supposons  $\dim(X) = 3$  et  $-K_X = 2H$ . La dimension attendue de  $\overline{M}_{0,0}(X, d)$  est  $d$ , celle attendue de  $\overline{M}_{0,0}(X, d)$  est donc  $d + 1$  et celle - toujours attendue - d'une fibre de  $\overline{M}_{0,0}(X, d) \rightarrow X$  est finalement  $d - 2$ . Il suffit de remplacer  $d$  par  $2d$  si l'on considère l'espace  $\overline{M}_{0,0}(X, \alpha)$ , dont la dimension attendue est donnée par le degré anticanonique.

**7.2. Ensemble exceptionnel et parties faiblement accumulatrices.** — Pour les volumes de Fano que nous allons considérer, l'ensemble exceptionnel relativement à l'invariant  $a$  est vide. La preuve de ce résultat est exposée dans [LTT18, Section 6.3].

**Proposition 7.2.1.** — *Soit  $X$  un volume de Fano de rang de Picard 1, d'index 2 et de degré supérieur ou égal à 2. Il n'existe pas de sous-variété  $Y$  telle que  $a(Y, -(K_X)|_Y) > a(X, -K_X)$ .*

*Démonstration.* — Voir [LTT18, Proposition 6.5 & Proposition 6.8]. □

Nous admettrons en partie le lemme suivant.

**Lemme 7.2.2.** — *Soit  $X$  un volume de Fano de rang de Picard 1, d'index 2 et de degré supérieur ou égal à 2. Notons  $\Sigma(X)$  la variété des droites projectives sur  $X$  et  $\Sigma(X)'$  sa famille universelle munie de l'application d'évaluation  $\rho : \Sigma(X)' \rightarrow X$ . Alors*

$$a(\Sigma(X)', -\rho^*K_X) = a(X, -K_X)$$

$$b(\Sigma(X)', -\rho^*K_X) = b(X, -K_X)$$

et tout  $a$ -revêtement  $f : Y \rightarrow X$  (cf. Définition 2.4.2) se factorise rationnellement à travers  $\Sigma(X)'$ .

*Esquisse de preuve du second point.* — Soit  $f : Y \rightarrow X$  un  $a$ -revêtement. On rappelle que  $a(X, -K_X) = 1$ . Quitte à prendre une résolution, on peut supposer que  $Y$  est lisse. On raisonne par disjonction de cas sur la dimension d'Iitaka de  $K_Y - f^*K_X$ , laquelle est comprise entre 0 et 2.

Si  $\kappa(Y, K_Y - f^*K_X) = 2$  alors on considère la fibration canonique  $Y \rightarrow Z$  associée à la paire  $(Y, -f^*K_X)$ , dont une fibre  $F$  est une courbe vérifiant  $a(F, (-f^*K_X)|_F) = 1$ , et dont l'image de  $F$  dans  $X$  est donc une droite projective. Ainsi  $f$  se factorise à travers  $\Sigma(X)$ .

Si  $\kappa(Y, K_Y - f^*K_X) = 1$  alors une fibre  $F$  de  $Y \rightarrow Z$  est une surface vérifiant  $a(F, (-f^*K_X)|_F) = 1$ . La supposant générale, elle vérifie de plus  $\kappa(F, K_F - (f^*K_X)|_F) = 0$ , ce qui est absurde par un argument donné dans [LTT18, Section 6.3] : la dimension d'Iitaka pour une telle surface doit être égale à 1.

Le cas  $\kappa(Y, K_Y - f^*K_X) = 0$  n'est pas réalisé, c'est le résultat de [LT17, Théorème 1.9].  $\square$

**7.3. Description des composantes.** — Le résultat principal de cette troisième partie est le suivant.

**Théorème 7.3.1 ([LT19, Théorème 7.9]).** — *Soit  $X$  un volume de Fano, de rang de Picard 1, d'index 2 et de degré supérieur ou égal à 2 :  $\text{Pic} = \mathbf{Z}H$ ,  $-K_X = 2H$  et  $H^3 \geq 2$ . Dans le cas  $H^3 = 2$ , supposons  $X$  générale dans son espace de module. Soit  $d \geq 2$ . Alors  $\overline{M}_{0,0}(X, d)$  est constitué de deux composantes irréductibles  $\mathcal{R}_d$  et  $\mathcal{N}_d$  telles que :*

- un élément général de  $\mathcal{R}_d$  est une application birationnelle sur une courbe irréductible
- un élément général de  $\mathcal{N}_d$  est une application stable de degré  $d$  vers une droite projective de  $X$ .

De plus, pour tout  $x \in X$  général, la fibre  $\rho_1^{-1}(x) \cap \mathcal{R}'_d$  est irréductible.

Jusqu'à la fin de ce mémoire et afin d'abrégier les énoncés, on dira qu'une variété de Fano de dimension 3, de rang de Picard 1 et d'index 2 est un *volume de Fano de type (1, 2)*. On la supposera toujours générale dans son espace de module si son degré est égal à 2.

## 8. Droites et coniques

Pour initialiser la récurrence, on est ramené à montrer que le schéma de Hilbert des droites sur  $X$ , noté  $\Sigma(X)$ , est irréductible et que sa famille universelle dominante lorsque  $X$  est un volume de Fano de type  $(1, 2)$ .

On prend ici comme référence le regroupement des preuves de la littérature réalisé par Kuznetsov, Prokhorov et Shramov [KPS18]. Chaque composante irréductible de  $\Sigma(X)$  est génériquement lisse de dimension 2 et dominante [KPS18, Lemme 2.2.6]. Si le  $H$ -degré de  $X$  est supérieur ou égal à 3,  $\Sigma(X)$  est une surface lisse [KPS18, Proposition 2.2.8] et on peut en donner une description explicite [KPS18, Théorème 1.1.1]. Si  $X$  est de  $H$ -degré 2, c'est-à-dire s'il s'agit d'un revêtement double  $f : X \rightarrow \mathbf{P}^3$  ramifié le long d'une quartique lisse  $Q$ , alors  $\Sigma(X)$  est un revêtement double du sous-schéma de la grassmannienne  $\text{Gr}(2, 4)$  paramétrant les droites tangentes en deux points à  $Q$ , ramifié en un nombre fini de points donnés par les droites contenues par  $Q$  [KPS18, Remarque 2.2.9]. En résumé on a la proposition suivante.

**Théorème 8.0.1.** — *Soit  $X$  un volume de Fano de type  $(1, 2)$ . Alors  $\overline{M}_{0,0}(X, 1)$  est isomorphe à la variété des droites sur  $X$ . En particulier,  $\overline{M}_{0,0}(X, 1)$  est irréductible et paramètre génériquement une courbe libre sur  $X$ .*

Dans la suite, une conique désigne une courbe  $C$  de  $X$ , dont le nombre d'intersection avec  $H$  est 2, c'est-à-dire

$$\chi(\mathcal{O}_C(m)) = 2m + 1$$

pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ . Par Riemann-Roch, une telle courbe est bien de genre 0. La variété des coniques sur  $X$  désigne le schéma de Hilbert défini par le polynôme  $P(m) = 2m + 1$ .

Nous traitons donc à présent le cas des courbes stables de  $H$ -degré deux dans  $X$ . L'énoncé est le suivant.

**Proposition 8.0.2.** — *Soit  $X$  un volume de Fano de type  $(1, 2)$ .*

*Alors l'espace grossier  $\overline{M}_{0,0}(X, 2)$  est constitué de deux composantes irréductibles  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{N}_2$ .*

*Un élément général  $\mathcal{R}_2$  est une application stable d'une courbe irréductible vers une conique lisse dans  $X$ . Un élément de  $\mathcal{N}_2$  est une application de  $\mathbf{P}^1$  vers une droite projective, de degré 2.*

*Démonstration.* — Soit  $(C, f)$  un élément de  $\overline{M}_{0,0}(X, 2)$ . Le degré de  $f$  est donné par  $\sum_i \deg(C_i) \deg(f|_{C_i}) = 2$ , ce qui permet la distinction suivante.

Supposons qu'il existe une composante  $C'$  de  $C$  tel que la restriction de  $f$  à  $C'$  n'induit pas une application birationnelle sur son image. L'image contient donc une droite et  $(C, f)$  est une application stable de  $\mathbf{P}^1$  vers une droite. On définit  $\mathcal{N}_2$  comme l'union de toutes les composantes  $M \subset \overline{M}_{0,0}(X, 2)$  dont tout élément général est de ce type. L'espace de paramètres  $\mathcal{N}_2$  est irréductible d'après le Théorème 8.0.1.

On définit  $\mathcal{R}_2$  comme le complémentaire de  $\mathcal{N}_2$  dans  $M \subset \overline{M}_{0,0}(X, 2)$ . Un élément général de  $\mathcal{R}_2$  est donc est une application birationnelle d'une courbe rationnelle vers une conique lisse dans  $X$ . On est donc ramené à montrer que la famille des coniques lisses sur  $X$  est irréductible. On traite les différents cas dans les paragraphes ci-dessous.  $\square$

**8.1. Intersection complète de deux quadriques  $Q_0$  et  $Q_\infty$  dans  $\mathbf{P}^5$  ( $H^3 = 4$ ).** — Donnons-nous  $C \subset X$  une telle conique lisse. Cette conique engendre un plan  $P$  dans  $\mathbf{P}^5$ , et c'est l'unique plan la contenant. Notons à présent  $(Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}^1}$  le pinceau des quadriques contenant  $X$  : une forme quadratique définissant  $Q_\lambda$  est donnée par

$$q_\lambda = uq_0 + vq_\infty \quad \lambda = [u : v] \in \mathbf{P}^1$$

où  $q_0$  et  $q_\infty$  définissent  $Q_0$  et  $Q_\infty$ . Puisque  $C$  est dans  $X = Q_0 \cap Q_\infty$ , toute quadrique  $Q_\lambda$  contient  $C$  et  $Q_\lambda \cap P = C$  pour  $\lambda$  général (c'est-à-dire  $q_\lambda|_P \neq 0$ ,  $Q_\lambda$  ne contient pas  $P$ ). Notons  $V$  l'espace vectoriel de dimension 3 défini par  $P$ . D'après ce qui précède, les restrictions à  $V$  de  $q_0$  et  $q_\infty$  sont proportionnelles. autrement dit, il existe  $[u : v] \in \mathbf{P}^1$  tel que  $uq_0|_V + vq_\infty|_V = 0$ , c'est-à-dire qu'il existe une unique quadrique  $Q_\lambda$  contenant le plan  $P$ . Réciproquement, étant donné un plan  $P$  contenu dans une quadrique  $Q_\lambda$  du pinceau, pour un certain  $\lambda = [u : v] \in \mathbf{P}^1$  fixé, et  $V$  l'espace vectoriel de dimension 3 représenté par  $P$ , on a  $uq_0|_V + vq_\infty|_V = 0$ . Ainsi les formes  $q_0|_V$  et  $q_\infty|_V$  sont proportionnelles, donc les intersections  $Q_0 \cap P$  et  $Q_\infty \cap P$  définissent une même quadrique  $C$  contenue dans  $X$ . Rappelons qu'une quadrique lisse de dimension 4 contient deux familles de plans, tandis qu'une quadrique singulière (un cône quadrique) n'en contient qu'une seule. *Via* cette correspondance conique-plan, on est donc ramené à montrer que la famille des plans contenus dans les quadriques  $(Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}^1}$  est irréductible. Notons  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{P}^1$  cette famille (propre), et considérons sa factorisation de Stein

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{P}^1 \\ & \searrow \pi' & \nearrow g \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

avec  $g$  fini, de degré 2, ramifié au-dessus des  $\lambda$  tels que  $Q_\lambda$  est singulière, et  $\pi'$  propre tel que  $\pi'_* \mathcal{O}_{\mathcal{W}} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ . Le schéma  $\mathcal{D}$  est par définition  $\text{Spec}_{\mathbf{P}^1}(\pi'_* \mathcal{O}_{\mathcal{W}})$ . C'est donc une courbe irréductible et régulière. Le genre de  $\mathcal{D}$  est donné par la formule de Riemann-Hurwitz, ce qui nécessite de connaître le nombre de cônes quadriques dans le pinceau  $(Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}^1}$ . Il y en a six, donnés par le lieu d'annulation du polynôme homogène à deux variables  $\det(R(u, v))$ , de degré 6, où  $R(u, v) = uR_0 + vR_\infty$  et  $R_0, R_\infty$  sont des matrices symétriques  $6 \times 6$  définissant  $Q_0$  et  $Q_\infty$ . Il vient donc

$$\chi(\mathcal{D}) = \deg(g) \times \chi(\mathbf{P}^1) - 6 \times (2 - 1) = -2$$

d'où  $g(\mathcal{D}) = 2$ . Une fibre au dessus de  $\mathcal{D}$  est une famille de plans d'une quadrique  $Q_\lambda$  donnée. Chaque fibre est donc irréductible,  $\mathcal{W}$  est donc irréductible et finalement  $\mathcal{R}_2$  est irréductible.

**8.2. Cubique dans  $\mathbf{P}^4$  ( $H^3 = 3$ ).** — L'intersection de  $X$  avec un plan est une courbe de  $H$ -degré 3, laquelle peut être réductible, c'est-à-dire être l'union d'une conique et d'une droite projective. Soit  $C \subset X$  une conique lisse, et notons  $P \subset \mathbf{P}^4$  le plan qu'elle engendre. Dans ce cas, l'intersection de  $P$  avec  $X$  est l'union de  $C$  et d'une droite projective dans  $P$ .

Étant donnée une droite projective  $\ell \subset X$  et un plan  $P$  la contenant, l'intersection de  $X$  avec  $P$  est l'union de  $\ell$  et d'une conique dans  $P$  (éventuellement singulière). La donnée  $\ell \subset P$  d'une droite projective  $\ell \subset X$  contenue dans un plan  $P \cong \mathbf{P}^2$  détermine ainsi de façon unique une conique de  $X$ . Ainsi, la variété des coniques lisses de  $X$  est isomorphe à un fibré projectif de rang 2 au-dessus de la variété des droites de  $X$ . Elle est donc irréductible.

**8.3. Revêtement double de  $\mathbf{P}^3$  ramifié le long d'une quartique lisse ( $H^3 = 2$ ).** — Notons  $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^3$  le revêtement double et  $Q$  la quartique lisse, lieu de ramification. Donnons-nous  $C$  une conique dans  $X$ , image de  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X \subset \mathbf{P}^3$ .

L'étude du relevé  $\tilde{\phi}$  via  $\pi$  d'une courbe  $\phi : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$  de degré donné  $d$  permet de distinguer deux cas. Soit l'image de  $C$  par  $\pi$  est une droite projective et  $C$  est un revêtement double de celle-ci, soit l'image de  $C$  par  $\pi$  est une conique  $C' \subset \mathbf{P}^3$  (qui n'est pas une droite projective double) et tangente à  $Q$  en chaque point de  $Q \cap C'$ . En effet, la quartique  $Q$  est définie par une section  $q$  du fibré  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4)$ . La situation est résumée par le diagramme suivant. Le carré étant cartésien, le relevé  $\tilde{\phi}$  détermine de façon unique une section  $s : \mathbf{P}^1 \rightarrow X \times_{\mathbf{P}^3} \mathbf{P}^1$  de la projection.

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathbf{P}^3} \mathbf{P}^1 & \longrightarrow & X \\ \tilde{s} \downarrow & \nearrow \tilde{\phi} & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{P}^3 \end{array}$$

Par propriété, une telle section correspond à un morphisme d'anneau  $k(\mathbf{P}^1) \rightarrow k(X \times_{\mathbf{P}^3} \mathbf{P}^1)$  lui-même section de l'inclusion naturelle  $k(\mathbf{P}^1) \hookrightarrow k(X \times_{\mathbf{P}^3} \mathbf{P}^1)$ . Par construction  $X \times_{\mathbf{P}^3} \mathbf{P}^1$  est une courbe. Notons par la suite  $q' = q \circ \phi$ . On suppose que la caractéristique du corps de base est différente de 2 et on veut montrer que le tiré en arrière par  $\phi$  du revêtement  $X \rightarrow \mathbf{P}^3$  ramifié en  $q = 0$  est un revêtement de  $\mathbf{P}^1$  ramifié en  $q' = 0$ .

Sur un ouvert affine  $U = \text{Spec}(k[X_1, X_2, X_3]) \subset \mathbf{P}^3$  on a le diagramme dual suivant

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, X_2, X_3] = k[U] & \xrightarrow{\phi^*} & k[\phi^*U] \\ \downarrow \pi^* & & s^* \downarrow \\ k[X_1, X_2, X_3, T]/(T^2 - q|_U) & \longrightarrow & k[X_U \times_U \mathbf{P}^1] \end{array}$$

où

$$k[X_U \times_U \mathbf{P}^1] = k[\phi^*U] \otimes_{k[U]} k[X_1, X_2, X_3, T]/(T^2 - q|_U) = (k[\phi^*U])[T]/(T^2 - q'_{|\phi^*U}).$$

Ainsi  $X \times_{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$  est un revêtement de degré 2 ramifié au-dessus des points dont l'image par  $\phi$  rencontre la quartique  $Q \subset \mathbf{P}^3$ . L'image de  $\phi$  est une conique si et seulement si  $k(X \times_{\mathbf{P}^3} \mathbf{P}^1)$ , extension quadratique de  $k(\mathbf{P}^1)$ , est isomorphe à  $k(\mathbf{P}^1) \times k(\mathbf{P}^1)$ , si et seulement si  $q'_{|\phi^*U}$  est un carré pour tout ouvert affine  $U$ . Ceci équivaut enfin à ce que le degré de  $q'$  en chaque point  $p \in \mathbf{P}^1$  est pair. Ainsi, l'image de  $\phi$  est une conique si et seulement si elle est tangente à  $Q$  en tout point d'intersection. Dans ce cas le relevé  $\tilde{\phi}$  fournit un revêtement double d'une conique *via*  $\pi$ .

Si l'image de  $C$  par  $\pi$  est une droite projective, celle-ci possède un point tangent à  $Q$ . Si l'image de  $C$  par  $\pi$  est une conique  $C'$ , cette dernière est contenue dans un unique plan  $P \subset \mathbf{P}^3$ .

Réciproquement, pour tout plan  $P \subset \mathbf{P}^3$ , l'intersection  $P \cap Q$  est une quartique plane. Dans le cas où cette dernière est lisse, l'image réciproque  $f^{-1}(P)$  est une surface de Del Pezzo de degré 2 (*cf* Exemple 1.4.10). On obtient donc une application  $\mathcal{W} \rightarrow (\mathbf{P}^3)^\vee$  associant à une conique  $C$  l'hyperplan de  $\mathbf{P}^3$  correspondant. À nouveau, on considère la factorisation de Stein de cette famille.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & (\mathbf{P}^3)^\vee \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

Une surface de Del Pezzo (lisse) de degré 2 contient 126 familles de coniques [Tes06, Proposition 2.14] donc  $\mathcal{D} \rightarrow (\mathbf{P}^3)^\vee$  est de degré 126. Montrons que  $\mathcal{D}$  est irréductible.

Une quartique plane est donnée, à une constante multiplicative près, par une section de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(4)$ . Or  $h^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(4)) = 15$ . L'espace paramétrant les quartiques planes est donc  $\mathbf{P}^{14}$ . Soit  $U \subset \mathbf{P}^{14}$  l'ouvert paramétrant les quartiques planes lisses. On obtient un revêtement  $\mathcal{D}' \rightarrow U$  de degré 126 paramétrant les familles de coniques sur le revêtement double  $\pi^{-1}(P) \rightarrow P \cong \mathbf{P}^2$  ramifié le long d'une quartique plane lisse.

Si  $F$  est une fibre de  $\mathcal{D}' \rightarrow U$ , le groupe fondamental  $\pi_1(U)$  agit transitivement sur  $F$  [LTT18, Exemple 8.5]. En effet, le groupe de monodromie est le groupe symplectique du premier groupe de cohomologie de la quartique plane  $F$  [Bea86, Théorème 4]. D'après [GH04, Section 7] et [LTT18, Exemple 8.5], le groupe symplectique agit transitivement sur l'ensemble des bases d'Arnonhold, donc le groupe de monodromie agit transitivement sur les 126 coniques d'une surface de Del Pezzo de degré 2, par la correspondance entre courbes lisses nonhyperélliptique de genre 3 munies de bases d'Arnonhold, et les surfaces de Del Pezzo de degré 2 munies d'un groupe de Picard marqué. Le but est de montrer que si  $Y$  est générale alors l'action de monodromie sur les fibres reste surjective pour  $\mathcal{D}$ .

L'espace des polynômes nuls ou homogènes de degré 4 à quatre indéterminées est de dimension  $\binom{7}{3} = 35$  donc les surfaces quartiques dans  $\mathbf{P}^3$  sont paramétrées par l'espace projectif  $\mathbf{P}^{34}$ . On note  $V' \subset \mathbf{P}^{34}$  l'ouvert paramétrant les quartiques irréductibles,  $U' \subset \mathbf{P}^{14}$  celui paramétrant les courbes quartiques planes irréductibles, et on considère l'évaluation

$$\begin{array}{ccc} V' \times \mathrm{PGL}_4 & \dashrightarrow & U' \\ ([f], [A]) & \longmapsto & [f((X_0, X_1, X_2, 0) \times A)] \end{array}$$

définie sur l'ouvert  $C_{V'}$  de  $V' \times \mathrm{PGL}_4$  donné par  $f((X_0, X_1, X_2, 0) \times A) \neq 0$ . Autrement dit, on intersecte la surface quartique donnée par  $[f]$  avec l'image de l'hyperplan  $x_3 = 0$  par  $A$  et on veut vérifier une propriété de Lefschetz concernant

$$V' \xleftarrow{u} C_{V'} \xrightarrow{p} U'.$$

L'ouvert  $C_{V'}$  vérifie les hypothèses de [Kol96, Théorème 5] : une fibre de  $C_{V'} \rightarrow U'$  est un ouvert d'un fibré affine au-dessus de  $\mathrm{PGL}_4$ , donc  $u$  est lisse et surjective,  $p$  est bien sûr lisse et ses fibres

sont irréductibles, et deux points généraux de  $U'$  peuvent être reliés par une  $C_{V'}$ -chaîne, c'est-à-dire une chaîne de fibres de  $C_{V'} \rightarrow U'$  (voir [Kol15, Définition 12] pour une définition plus précise). Pour un point général  $v \in V'$ , il existe alors un ouvert  $(\{v\} \times \mathrm{PGL}_4)^0$  tel que

$$\pi_1((\{v\} \times \mathrm{PGL}_4)^0) \rightarrow \pi_1(U')$$

est surjective. On obtient alors une action transitive sur chaque fibre de  $\mathcal{D} \rightarrow (\mathbf{P}^3)^\vee$  et on en déduit que  $\mathcal{D}$  est irréductible si  $Y$  est paramétrée par un point général de  $V'$ , autrement dit si  $X$  est générale dans son module.

#### 8.4. Section de $\mathbf{G}(1, 4)$ par un sous-espace linéaire général de codimension 3 ( $H^3 = 5$ ).

— La preuve de ce dernier cas dépasse le cadre de ce mémoire et est traité dans la thèse de Sanna [San14, Proposition 2.32]. Il y est montré que la variété des coniques sur  $X$  est isomorphe à un espace projectif.

### 9. Courbes de degré quelconque

**9.1. Composantes des courbes passant par un point fixé.** — Si  $\alpha$  est la classe d'une courbe nef, la dimension d'une composante  $M$  de  $\overline{M}_{0,m}(X, \alpha)$  est minorée par la quantité

$$-K_X \cdot \alpha + \dim X - 3 + m$$

laquelle correspond à la dimension attendue. On s'attend par ailleurs à ce que l'évaluation

$$\rho_1 : \overline{M}_{0,1}(X, \alpha) \rightarrow X$$

soit plate en dehors d'un nombre fini de points de  $X$  (ceci reste conjectural). Dans ce cas, la dimension attendue d'une fibre au dessus d'un point est

$$-K_X \cdot \alpha - 2.$$

**Théorème 9.1.1.** — *Soit  $X$  un volume de Fano de type  $(1, 2)$ .*

*Soit  $\alpha$  la classe d'une courbe nef. Soit  $M$  une composante de  $\overline{M}_{0,0}(X, \alpha)$ . Pour tout point  $p$  de  $X$ , on note  $M_p$  la fibre du morphisme d'évaluation  $\rho_1 : M' \rightarrow X$ , c'est-à-dire le lieu paramétrant les courbes de  $M$  passant par  $p$ . Alors il existe un ensemble fini  $S$  de points de  $X$  tels que*

- $\dim M_p = -K_X \cdot \alpha - 2$  si  $p \notin S$ , et alors la courbe générale paramétrée par  $M_p$  est irréductible ;
- $\dim M_p \leq -K_X \cdot \alpha - 1$  si  $p \in S$ .

*Démonstration.* — D'après les Propositions 2.2.3 et 2.2.4, et le fait qu'une variété de Fano est rationnellement connexe, le fermé  $X \setminus \mathrm{ev}(\mathbf{P}^1 \times \mathrm{Mor}^{\mathrm{lib}}(\mathbf{P}^1, X))$  est strict et contient les composantes non-libres des courbes paramétrées par  $M$ . De plus, la dimension d'une composante de  $M_p$  paramétrant des courbes de classe  $\alpha$  est au-moins égale à  $-K_X \cdot \alpha - 2$ .

Le cas  $-K_X \cdot \alpha = d = 2$  est celui de la variété des droites sur  $X$ , à nouveau notée  $\Sigma(X)$  dans la suite, qui est irréductible de dimension 2 d'après le Théorème 8.0.1. On note  $S$  l'ensemble de points fermés de  $X$  contenus dans une famille unidimensionnelle de droites. Montrons que  $S$  est fini.

Pour un point  $p \in X$  notons  $\Sigma(X, p)$  le sous-schéma de  $\Sigma(X)$  paramétrant les droites dans  $X$  passant par  $p$ , et soit  $\ell$  une droite passant par  $p$  paramétrée par  $[\ell] \in \Sigma(X, p)$ . Il découle de [Deb01, Paragraphe 2.9] que l'espace tangent à  $\Sigma(X, p)$  en  $[\ell]$  est isomorphe à  $H^0(\ell, N_{\ell/X}(-1))$ .

Or d'après [Isk80, Proposition III.1.3(ii)] les seules possibilités sont

- $N_{\ell/X} \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$
- $N_{\ell/X} \cong \mathcal{O}_X(-1) \oplus \mathcal{O}_X(1)$

et donc les seules possibilités pour  $N_{\ell/X}(-1)$  sont

- $N_{\ell/X} \cong \mathcal{O}_X(-1) \oplus \mathcal{O}_X(-1)$  auquel cas  $\dim(H^0(\ell, N_{\ell/X}(-1))) = 0$ ;
- $N_{\ell/X} \cong \mathcal{O}_X(-2) \oplus \mathcal{O}_X$  auquel cas  $\dim(H^0(\ell, N_{\ell/X}(-1))) = 1$ .

Ainsi par un point fixé de  $X$  passe soit un nombre fini de droites, soit éventuellement une famille unidimensionnelle de droites. Par conséquent  $S = \{p \in X \mid \dim(\Sigma(X, p)) = 1\}$ . De plus, le second cas fournit qu'une famille unidimensionnelle de droites passant par un point fixé est constituée de droites non-libres. Or les courbes libres forment un ouvert de  $\text{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$  d'après la Proposition 2.2.3. Une famille unidimensionnelle de droites passant par un point fixé est donc une composante d'un fermé strict de  $\Sigma(X)$ . Par conséquent il existe un nombre fini de telles familles. Reste à montrer que ces familles ne produisent qu'un nombre fini de points  $p$  tels que  $\dim(\Sigma(X, p)) = 1$ . Donnons-nous donc deux points distincts  $p, p' \in X$  tels que  $\dim(\Sigma(X, p)) = 1$ . Remarquons qu'ils ne peuvent appartenir à la même famille unidimensionnelle de droites puisque par deux points passe au plus une seule droite. Supposons par l'absurde que  $S$  soit infini, alors puisque les familles unidimensionnelles de droites passant par un point fixé sont en nombre fini, il existe deux points distincts de  $X$  appartenant à la même famille unidimensionnelle de droites, ce qui est en contradiction avec la remarque précédente. Donc  $S$  est fini.

On se donne à présent  $M_p^0$  une composante de la fibre  $M_p$ . La première étape est d'analyser la situation lorsque la courbe générale  $(C, f)$  paramétrée par  $M_p^0$  est irréductible.

**Supposons d'abord que  $(C, f)$  est libre.** Alors ses déformations dominent  $X$  et  $M_p^0$  a la dimension attendue. On suppose donc dans la suite que  $(C, f)$  n'est pas libre. La remarque en début de preuve assure que les déformations ne dominent pas  $X$ . On poursuit donc l'étude en distinguant les cas selon la dimension de la sous-variété  $Y$  de  $X$  dominée par les déformations des courbes paramétrées par  $M_p^0$ .

**Supposons que  $Y$  est une courbe irréductible.** Alors on a la factorisation suivante, où le degré de chaque flèche est indiqué.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{d} & X \\ & \searrow r & \nearrow K_X \cdot Y \\ & & Y \end{array}$$

Alors  $\dim M_p^0 \leq d - 2$ . En effet, supposons que  $M_p^0$  n'a pas la dimension attendue, c'est-à-dire  $\dim M_p^0 > d - 2$ . Alors  $d = -K_X \cdot Y \times r$  donne  $-K_X \cdot Y < 2$ . Or  $-K_X$  est ample et par le critère de Nakai-Moishezon, la seule possibilité est  $-K_X \cdot Y = 1$ , d'où  $a(Y, -(K_X)|_Y) = 2$ . Or la Proposition 7.2.1 nous fournit la contradiction  $a(Y, -(K_X)|_Y) < 2$ . Donc

$$\dim M_p^0 = d - 2.$$

**Traisons à présent le cas où  $Y$  est une surface irréductible de  $X$ .** Donnons-nous  $\phi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  une résolution. Le lemme suivant nous permet d'obtenir une borne pour  $\dim M_p^0$ .

**Lemme 9.1.2.** — *Soit  $Y$  une variété projective de dimension  $n$  et  $\phi : Y' \rightarrow Y$  une résolution. Soit  $p \in Y$  un point tel qu'il existe une famille dominante de courbes rationnelles passant par  $p$  paramétrées par une composante  $M \subset \overline{M}_{0,0}(Y)$ . On note  $C'$  la transformation stricte d'une courbe générale  $(C, f)$  paramétrée par  $M$  et  $\tilde{Y}_p$  la fibre de  $\phi$  au-dessus de  $p$ . Alors, si  $M_p^0$  désigne une composante de la fibre de  $M' \rightarrow Y$  au-dessus de  $p$ ,*

$$\dim(M_p^0) \leq -K_{\tilde{Y}} \cdot \tilde{C} + \dim \tilde{Y}_p - 2.$$

En appliquant ce lemme à notre situation, avec  $\dim \tilde{Y}_p = 0$  ou  $1$ , on a

$$\dim(M_p^0) \leq -K_{\tilde{Y}} \cdot \tilde{C} - 1.$$



Supposons par l'absurde  $\dim(M_p^0) \geq -K_X \cdot C$ . Alors puisque

$$-K_X \cdot C = -(K_X)_Y \cdot C = -\phi^*(K_X)_{|Y} \cdot \tilde{C}$$

on obtient

$$(K_{\tilde{Y}} - \phi^*(K_X)_{|Y}) \cdot \tilde{C} < 0.$$

Mais alors  $a(Y, -K_X) > 1$  ce qui contredit à nouveau la Proposition 7.2.1. Par conséquent, en combinant cette remarque la minoration connue, on obtient

$$-K_X \cdot C - 2 \leq \dim(M_p^0) \leq -K_{\tilde{Y}} \cdot \tilde{C} - 1 \leq -K_X \cdot C - 1.$$

Il n'y a donc plus qu'à étudier le cas d'égalité  $K_{\tilde{Y}} \cdot \tilde{C} = K_X \cdot C$ . Dans ce cas  $a(Y, -K_X) = 1$  et la classification faite dans la preuve du Lemme 7.2.2 nous dit que  $\kappa(K_{\tilde{Y}} - \phi^*(K_X)_{|Y}) = 1$ . Puisqu'alors

$$(K_{\tilde{Y}} - \phi^*(K_X)_{|Y}) \cdot \tilde{C} = 0$$

on en déduit que la courbe  $\tilde{C}$  est une fibre de la fibration d'Iitaka de  $K_{\tilde{Y}} - \phi^*(K_X)_{|Y}$  et  $2 = \tilde{C} \cdot K_{\tilde{Y}} = C \cdot K_X$  [LTT18, Proposition 5.9]. Or  $-K_X = 2H$ , donc  $(f, C)$  tombe dans  $\overline{M}_{0,0}(X, 1)$  et finalement  $p \in S$  (Théorème 8.0.1).

**On conclut à présent la preuve en montrant, par récurrence sur le degré  $d$ , que les courbes réductibles ne peuvent former une composante de  $M_p$ .** On se donne un degré  $d \geq 2$  et on suppose que pour tout  $e < d$ , le théorème est vérifié pour toutes applications stables de degré anticanonique  $e$ . On se donne  $f : C \rightarrow X$  générale dans  $M_p^0$  et on suppose que  $C$  n'est pas irréductible. On adoptera les conventions de notation suivante. Lorsqu'un nœud de  $C$  est envoyé vers un point de  $X$ ,  $D$  désigne une composante connexe maximale de  $C$  contractée par  $f$  vers ledit point de  $X$ . On notera  $C_1, \dots, C_u$  les clôtures de Zariski des composantes connexes de  $C \setminus D$  et on supposera  $u \geq 2$ . Enfin,  $d_i$  désigne le degré anticanonique de  $f_*[C_i]$ . On a alors  $d = \sum_i d_i$ .

Traisons d'abord le cas  $p \in X \setminus S$ . Trois possibilités se dégagent.

- Un nœud de  $C$  est envoyé sur  $p$  et donc  $D$  est contractée sur  $p$ . Alors toutes les courbes  $(C_i, f_{|C_i})$  passent par  $p$  et

$$\dim(M_p^0) \leq \sum_{i=1}^u (d_i - 2) + u - 2 = d - u - 2.$$

où  $u - 2$  correspond au choix du point marqué envoyé sur  $p$  et des points d'attache de  $D$  à  $C_1, \dots, C_u$ .

- Un nœud de  $C$  est envoyé sur un point dans  $S$ . On suppose que l'image inverse de  $p$  est dans  $C_1$ . Alors  $(C_1, f_{|C_1})$  est dans une fibre au-dessus de  $p$ , tandis que  $C_2, \dots, C_u$  sont dans une fibre au-dessus d'un point de  $S$ . Alors

$$\dim(M_p^0) \leq d_1 - 2 + \sum_{i=2}^u (d_i - 1) + \underbrace{u - 3}_{\text{points d'attache}}$$

dans le cas  $u \geq 3$  et

$$\dim(M_p^0) \leq d_1 + d_2 - 3 = d - 3$$

si  $u = 2$ . On peut résumer ces deux cas par

$$\dim(M_p^0) \leq d - u - 1 + (u - 3)_+$$

où  $(x)_+ = \max(0, x)$  désigne la partie positive.

- Un nœud de  $C$  est envoyé sur un point de  $X \setminus (S \cup \{p\})$ . Alors toutes les courbes  $(C_i, f|_{C_i})$  évitent  $S$  et  $p$  et

$$\dim(M_p^0) \leq d_1 - 2 + \sum_{i=2}^u (d_i - 2) + \underbrace{(u-3)_+ + 1}_{\text{points d'attache}} = d - 2u + 1 + (u-3)_+.$$

Traisons à présent rapidement le cas  $p \in S$ . Les trois possibilités sont très similaires.

- Un nœud de  $C$  est envoyé sur  $p$  et donc  $D$  est contractée sur  $p$ . Alors

$$\dim(M_p^0) \leq \sum_{i=1}^u (d_i - 1) + u - 2 = d - 2$$

- Un nœud de  $C$  est envoyé sur un point de  $S \setminus \{p\}$ . Alors

$$\dim(M_p^0) \leq d_1 - 1 + \sum_{i=2}^u (d_i - 1) + (u-3)_+ = d - u - 2 + (u-3)_+.$$

- Un nœud de  $C$  est envoyé sur un point de  $X \setminus S$ . Alors

$$\dim(M_p^0) \leq d_1 - 1 + \sum_{i=2}^u (d_i - 1) + (u-3)_+ + 1 = d - u - 1 + (u-3)_+.$$

Dans chacun des six cas ci-dessus,  $\dim(M_p^0) < d - 2$ . Les courbes réductibles ne peuvent donc constituer une composante de  $M_p$ .  $\square$

*Preuve du Lemme 9.1.2.* — Soit  $Y$  une variété projective et  $\phi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  une résolution. Soit  $p \in Y$  un point et  $M \subset \overline{M}_{0,0}(Y)$  une composante paramétrant une famille dominante de courbes rationnelles passant par  $p$ . On note  $\tilde{C}$  la transformation stricte d'une courbe générale  $(C, f)$  paramétrée par  $M$  et  $\tilde{Y}_p$  la fibre de  $\phi$  au-dessus de  $p$ . Soit  $\tilde{M}$  la composante de  $\overline{M}_{0,0}(\tilde{Y})$  paramétrant les déformations de  $\tilde{C}$  : cette famille domine  $\tilde{Y}$ , paramètre donc génériquement des courbes libres. La dimension de  $\tilde{M}$  est celle attendue, c'est-à-dire  $-K_{\tilde{Y}} \cdot \tilde{C}'$ . Soit  $\tilde{p}$  un point dans la fibre de  $\phi$  au-dessus de  $p$ . Considérons la fibre au-dessus de  $\tilde{p}$  de

$$\rho_1 : \tilde{M}' \rightarrow \tilde{Y}.$$

Celle-ci est de dimension au plus  $-K_{\tilde{Y}} \cdot \tilde{C} - 2$ . Ceci fournit finalement

$$\dim(M_p^0) \leq -K_{\tilde{Y}} \cdot \tilde{C} + \dim \tilde{Y}_p - 2$$

qui est la majoration attendue.  $\square$

**9.2. Composantes de degré quelconque.** — Le dernier élément dont nous avons besoin est une application du Lemme de cassure de Mori.

**Lemme 9.2.1.** — *Toute courbe libre sur  $X$  se déforme en une chaîne de courbes libres de degré anticanonique plus petit que  $\dim X + 1 = 4$ .*

*Démonstration.* — Par le Lemme de cassure de Mori [Deb01, Proposition 3.2], une courbe libre  $(C, f)$  de degré anticanonique

$$-K_X \cdot f_* C \geq 2 + \dim X$$

peut être déformée en une application stable réductible. Ces déformations forment un lieu de codimension 1 de la composante paramétrant  $(C, f)$ . L'étude dimensionnelle précédente montre qu'il ne peut s'agir que de l'union de deux courbes libres. On raisonne ensuite par récurrence en cassant à nouveau chaque courbe libre, en appliquant le Lemme 5.3.6 (cassure de chaînes libres), jusqu'à ce que le degré anticanonique de chacune des composantes soit inférieur ou égal à  $\dim(X) + 1$ .  $\square$

Nous sommes à présent en mesure d'achever la récurrence et prouver le Théorème 7.3.1.

*Preuve du Théorème 7.3.1.* — La composante  $\mathcal{N}_d$  paramétrant des applications stables de degré  $d$  vers des droites projectives est irréductible.

Soit  $M$  une composante de  $\overline{M}_{0,0}(X)$ , dont on suppose qu'elle est dominante et qu'elle paramètre génériquement des applications stables birationnelles. On veut montrer que la fibre  $\rho_1^{-1}(x) \cap M'$  est irréductible pour  $x \in X$  général. Donnons nous  $Y \rightarrow M'$  une résolution. Si l'on montre que  $Y \rightarrow X$  est à fibres connexes, alors on obtient notre résultat, car alors les fibres de  $M' \rightarrow X$  seront irréductibles. Supposons par l'absurde que cela n'est pas le cas : la factorisation de Stein  $Y \rightarrow Z \rightarrow X$  n'est alors pas triviale. Montrons qu'alors  $Z$  se factorise rationnellement à travers  $\mathcal{R}'_1$ . En particulier, les courbes paramétrées par  $M'$  se relèvent dans  $\mathcal{R}'_1$  tout en étant d'intersection nulle avec le lieu de ramification de  $\mathcal{R}'_1 \rightarrow X$ . Ce sont donc des revêtements multiples de droites, ce qui est en contradiction avec la définition de  $M$ . Nous avons ainsi prouvé que les fibres de  $M' \rightarrow X$  sont irréductibles.

À présent nous pouvons initier la récurrence sur le degré  $d$  des courbes. Le cas  $d = 2$  a fait l'objet d'une étude au cas-par-cas résumée par la Proposition 8.0.2. On suppose dans la suite  $d > 2$  et que l'on a prouvé le théorème pour tout degré  $d' \in \{2, \dots, d-1\}$ .

Soient  $(C_1, f_1)$  et  $(C_2, f_2)$  deux courbes libres dont la somme des degrés est  $d$ . Leur recollement est une courbe stable de degré  $d$  qui n'est pas dans  $\mathcal{N}_d$  : il existe donc des composantes de  $\overline{M}_{0,0}(X, d)$  différentes de  $\mathcal{N}_d$ . Donnons-nous  $M$  une telle composante : l'étude dimensionnelle du Théorème 9.1.1 montre qu'elle paramètre génériquement des courbes libres de degré  $d$ , et qu'elle est de la dimension attendue  $d$ . Donc si  $(C, f)$  est un élément général de  $M$ , alors  $C$  est irréductible et  $f$  est un morphisme birationnel. Par le Lemme 9.2.1,  $M$  paramètre aussi une chaîne de courbes libres, chacune de  $H$ -degré au plus 2 (on rappelle que l'on a supposé  $-K_X = 2H$ ). De plus, l'étude du degré 2 (cf. Proposition 8.0.2) nous dit que toute composante de l'espace des coniques contient une chaîne de droites.

Nous sommes donc en mesure d'appliquer le Lemme 5.3.6 à chacune des composantes de degré 2 de la chaîne de courbe libre pour obtenir une chaîne de *droites* libres, de longueur totale  $d$ . Toutes ces déformations fournissent une application stable  $(C'f')$ , qui est un point lisse  $M$ . Or, si ce point est dans  $\mathcal{N}_d$ , alors  $\mathcal{N}_d = M$  ce qui serait absurde.

Donc l'image de  $(C'f')$  dans  $X$  ne peut être une droite, puisque que cela signifierait exactement  $(C'f') \in \mathcal{N}_d$ . Donc, l'image de  $(C'f')$  est réductible et un point lisse de l'image de la composante principale de  $\mathcal{R}'_1 \times_X \mathcal{R}'_{d-1}$  par le morphisme de recollement

$$\mathcal{R}'_1 \times_X \mathcal{R}'_{d-1} \longrightarrow \overline{M}_{0,0}(X, d)$$

Une telle composante est unique par l'hypothèse de récurrence. Comme  $(C, f)$  est un point lisse,  $M$  contient cette image. La composante  $M$  est donc unique. La récurrence se propage.  $\square$

**9.3. Conjecture de Manin géométrique.** — La conjecture de Manin géométrique (conjecture 6.3.1) est vérifiée dans notre cas.

**Corollaire 9.3.1.** — *Soit  $X$  un volume de Fano de type  $(1, 2)$ . Pour toute classe de courbe  $\alpha$  de  $H$ -degré au moins 2, il existe une unique composante de Manin représentant la classe  $\alpha$ .*

## Références

- [BCHM10] Caucher BIRKAR, Paolo CASCINI, Christopher D. HACON et James MCKERNAN. “Existence of minimal models for varieties of log general type”. In : *Journal of the American Mathematical Society* 23.2 (2010), p. 405-468.
- [BDPP12] Sébastien BOUCKSOM, Jean-Pierre DEMAILLY, Mihai PĂUN et Thomas PETERNELL. “The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension”. In : *Journal of Algebraic Geometry* 22.2 (mai 2012), p. 201-248.
- [Bea86] Arnaud BEAUVILLE. “Le groupe de monodromie des familles universelles d’hyper-surfaces et d’intersections complètes”. In : *Complex analysis and algebraic geometry*. Springer, 1986, p. 8-18.
- [Bir16] Caucher BIRKAR. “Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties”. In : *arXiv preprint arXiv :1609.05543* (2016).
- [BM90] Victor V. BATYREV et Yu I. MANIN. “Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques”. In : *Mathematische Annalen* 286.1-3 (1990), p. 27-43.
- [Bou16] David BOURQUI. “Algebraic points, non-anticanonical heights and the Severi problem on toric varieties”. In : *Proceedings of the London Mathematical Society* 113.4 (2016), p. 474-514.
- [CS09] Izzet COSKUN et Jason STARR. “Rational curves on smooth cubic hypersurfaces”. In : *International Mathematics Research Notices* 2009.24 (2009), p. 4626-4641.
- [Deb01] Olivier DEBARRE. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [ELMNP06] Lawrence EIN, Robert LAZARSEFELD, Mircea MUSTAŢĂ, Michael NAKAMAYE et Mihaela POPA. “Asymptotic invariants of base loci”. In : *Annales de l’Institut Fourier*. T. 56. 6. 2006, p. 1701-1734.
- [FP96] William FULTON et Rahul PANDHARIPANDE. “Notes on stable maps and quantum cohomology”. In : *arXiv preprint alg-geom/9608011* (1996).
- [Ful84] William FULTON. *Intersection theory*. Springer Science & Business Media, 1984.
- [GH04] Benedict H. GROSS et Joe HARRIS. “On some geometric constructions related to theta characteristics”. In : *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory* (2004), p. 279-311.
- [Gro61] Alexandre GROTHENDIECK. “Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique, IV : Les schémas de Hilbert”. In : *Séminaire Bourbaki* 221 (1961).
- [Har77] Robin HARTSHORNE. *Algebraic geometry*. T. 52. Springer Science & Business Media, 1977.
- [HTT15] Brendan HASSETT, Sho TANIMOTO et Yuri TSCHINKEL. “Balanced line bundles and equivariant compactifications of homogeneous spaces”. In : *International Mathematics Research Notices* 2015.15 (2015), p. 6375-6410.
- [IP99] VA ISKOVSKIKH et Yu G PROKHOROV. *Fano varieties*. *Algebraic geometry. V., volume 47 of Encyclopaedia Math. Sci.* 1999.
- [Isk80] Vasilii Alekseevich ISKOVSKIKH. “Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties”. In : *Journal of Soviet mathematics* 13.6 (1980), p. 745-814.
- [KM94] Maxim KONTSEVICH et Yu MANIN. “Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry”. In : *Communications in Mathematical Physics* 164.3 (1994), p. 525-562.
- [KM98] János KOLLÁR et Shigefumi MORI. *Birational geometry of algebraic varieties*. T. 134. Cambridge university press, 1998.
- [Kol15] János KOLLÁR. “The Lefschetz property for families of curves”. In : *Rational points, rational curves, and entire holomorphic curves on projective varieties* 654 (2015), p. 143-154.

- [Kol96] János KOLLÁR. *Rational curves on algebraic varieties*. T. 32. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [KP01] Bumsiq KIM et Rahul PANDHARIPANDE. “The connectedness of the moduli space of maps to homogeneous spaces”. In : *Symplectic geometry and mirror symmetry*. World Scientific, 2001, p. 187-201.
- [KPS18] Alexander G. KUZNETSOV, Yuri G. PROKHOROV et Constantin A. SHRAMOV. “Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds”. In : *Japanese Journal of Mathematics* 13.1 (2018), p. 109-185.
- [Laz04a] Robert LAZARSFELD. *Positivity in algebraic geometry I : Classical setting : line bundles and linear series*. T. 48. Springer Science & Business Media, 2004.
- [Laz04b] Robert LAZARSFELD. *Positivity in algebraic geometry II : Positivity for Vector Bundles*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [LT17] Brian LEHMANN et Sho TANIMOTO. “On the geometry of thin exceptional sets in Manin’s conjecture”. In : *Duke Mathematical Journal* 166.15 (2017), p. 2815-2869.
- [LT19] Brian LEHMANN et Sho TANIMOTO. “Geometric Manin’s Conjecture and rational curves”. In : *Compositio Mathematica* 155.5 (2019), p. 833-862.
- [LTT18] Brian LEHMANN, Sho TANIMOTO et Yuri TSCHINKEL. “Balanced line bundles on Fano varieties”. In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2018.743 (2018), p. 91-131.
- [MM86] Yoichi MIYAOKA et Shigefumi MORI. “A Numerical Criterion for Uniruledness”. In : *The Annals of Mathematics* 124.1 (juil. 1986), p. 65.
- [Nak00] Michael NAKAMAYE. “Stable base loci of linear series”. In : *Mathematische Annalen* 318.4 (2000), p. 837-847.
- [Pet12] Thomas PETERNELL. “Varieties with generically nef tangent bundles”. In : *Journal of the European Mathematical Society* 14.2 (2012), p. 571-603.
- [RY19] Eric RIEDL et David YANG. “Kontsevich spaces of rational curves on Fano hypersurfaces”. In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2019.748 (2019), p. 207-225.
- [San14] Giangiacomo SANNA. “Rational curves and instantons on the Fano threefold  $Y_5$ ”. In : *arXiv preprint arXiv :1411.7994* (2014).
- [TB96] Yuri TSCHINKEL et Victor V. BATYREV. “Rational points on some Fano cubic bundles”. In : *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I : Mathematics* 323 (1996), p. 41-46.
- [Tes06] Damiano TESTA. “The irreducibility of the spaces of rational curves on del Pezzo surfaces”. In : *arXiv preprint math/0609355* (2006).
- [Tho98] Jesper F. THOMSEN. “Irreducibility of  $\overline{M}_{0,n}(G/P, \beta)$ ”. In : *International Journal of Mathematics* 9.03 (1998), p. 367-376.

---

Janvier - Juin 2020

Version finale du 21 septembre 2020

L. FAISANT