Mathématiques

Exercices de cours de MP*

Exercices classiques des concours X-ENS

Lycée Louis-le-Grand, Paris, France

Loïs Faisant

MP$^*_2$ - *2014-2016*

8 février 2017

Dernier décompte automatique : 489 énoncés répertoriés, 375 solutions rédigées.
Date et heure de compilation : 8 février 2017 13:06.

Table des matières

Première partie

Analyse

Chapitre 1

Fonctions convexes

Exercice 1.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est convexe ssi f est la borne supérieure d'un ensemble de fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution. Sens réciproque : on démontre d'abord rapidement le lemme suivant, plus général, et dont la démonstration est laissée au lecteur (c'est un simple passage au *sup*) :

Lemme 1.1.1. *Soit* A *une partie de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *constituée de fonctions convexes, non vide et majorée. Alors* A *possède une borne supérieure, et celle-ci est convexe.*

Sens direct : soit $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, $a \in \mathbb{R}$.
Considérons $\tau_a : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{m(x) - m(a)}{x - a} \end{array} \right.$. Quel que soit a, τ_a croit, et possède une limite à droite en a ainsi qu'à gauche, que l'on note respectivement $m'_d(a)$ et $m'_g(a)$. On définit alors, pour $a \in \mathbb{R}$, :

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & m(a) + (x - a)m'_d(a) \end{array} \right.$$

Considérons alors $\mathrm{A} = \{\varphi_a,\, a \in \mathbb{R}\}$. Il reste à montrer que m est la borne supérieure de A. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\varphi_a(x) \leq m(x)$. Si $a < x$: $m'_d(a) = \lim_{a^+} \tau_a \leq \tau_a(x)$ d'où on déduit : $(x - a)m'_d(a) \leq m(x) - m(a)$ et donc $m(x) \leq \varphi_a(x)$. Les autres cas se traitent de manière analogue lorsqu'ils ne sont pas triviaux. On a donc : $\varphi_a(x) \leq m(x)$.
A est donc une partie non vide et majorée par m. Soit $\varphi = \sup \mathrm{A}$. $\forall a \in \mathbb{R}, \varphi(a) \geq \varphi_a(a) = m(a)$, ce qui achève la démonstration : $m = \varphi$. □

Exercice 1.2 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, ..., \in \mathbb{R}_+$. Montrer :

$$(a_1 ... a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}. \tag{1.1}$$

Solution. Utiliser la concavité du logarithme. Pour le cas d'égalité, cela découle du caractère strict la convexité de ln. □

Exercice 1.3. Montrer que le sup d'un ensemble de fonctions convexes est convexe.

Exercice 1.4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexe. Soient $x_1 < x_2 < x_3$ dans I. Montrer que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(Théorème des pentes croissantes.)

Exercice 1.5. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Solution. Il s'agit de montrer que $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle. En prenant $a < b$ dans I, on se ramène à $\mathrm{I} = [a, b]$. Considérons

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathrm{I}^2 \mid x < y\}$$

qui est clairement convexe, ainsi que la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \end{array} \right.$$

qui est continue. On a alors :

- $\varphi(\Delta)$ intervalle de $\mathbb{R}$;
- $\varphi(\Delta) \subset f'([a, b])$ d'après le théorème des accroissements finis ;
- $f'([a, b]) \subset \overline{\varphi(\Delta)}$ par définition de la dérivée.

Par conséquent $f'([a, b])$ est un intervalle. $\square$

Chapitre 2

Suites réelles et complexes

Exercice 2.1. Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Existence et nature des bornes supérieures et inférieures de $\{a_1, ..., a_n\}$ au sens de la relation divise.

Exercice 2.2. Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.

Solution. On démontre le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit* (E, d) *un espace ordonné. De toute suite* $u \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$*, on peut extraire une sous-suite monotone.*

Preuve du lemme 2.2.1 : Soit $u \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$. Considérons l'ensemble

$$\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \ \exists p \geq n \ \forall q \geq p \ u_n \leq u_q\}$$

et distinguons deux cas.

- Si A est infini : on extrait de u une sous-suite croissante.
- Sinon, si A est fini : on extrait de u une sous-suite décroissante.

$\square$

Exercice 2.3. Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue.

Soit$(a, b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a < b$. On suppose $f(a) < f(b)$ par commodité. Soit $y \in [f(a), f(b)]$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a \\ b_0 = b \end{array} \right. \qquad \text{et par récurrence : } (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq y \\ \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Les deux suites suites obtenues sont adjacentes : $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ et (a_n) croît tandis que (b_n) décroît. Elles convergent vers la même limite $c \in [a, b]$.

Par récurrence immédiate, $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit, par continuité de f d'une part, par encadrement d'autre part, que $f(c) = y$. Ainsi $\boxed{f(\mathrm{I}) \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}}$.

$\square$

Exercice 2.4. Montrer que si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro, alors $\frac{u_n}{n} \underset{+\infty}{\to} 0$.

Exercice 2.5. Montrer que les suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$ convergent.

Solution. On montre aisément qu'une suite de Cauchy est bornée. On montre également facilement qu'une suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence converge.

Donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge, d'après Bolzano-Weierstrass. □

Exercice 2.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le problème :

$$\mathcal{E}_n : x^n + x^{n-1} ... + x = 3,\ x \geq 0. \tag{2.1}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}_n$ possède une unique solution que l'on notera u_n.

2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. **1.** Laissé au lecteur.

2. On remarque que la suite décroit tout en étant minorée par 0. Elle converge donc. Pour $n \geq 4$, $u_n \leq u_4 < 1$. On a alors :

$$3 = \sum_{k=1}^{n} u_n^k = \frac{u_n - u_n^{n+1}}{1 - u_n}, \tag{2.2}$$

ce qui permet de conclure que u_n tend vers $3/4$ (le passage à la limite est bien licite ici). □

Exercice 2.7. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ est le segment $[-1, 1]$. [a]

[a] Cet exercice est un cas particulier : si $u_{n+1} - u_n \to 0$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un segment.

Solution. On raisonne par double inclusion, l'une des deux étant évidente. Soit $\lambda \in [-1, 1]$ et $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\lambda = \sin\alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $\varphi(n) = \lfloor(\alpha + 2n\pi)^2\rfloor$. On vérifie que l'on définit ainsi une extractrice. Un développement limité permet de conclure, en écrivant $\varphi(n) = (\alpha + 2n\pi)^2 - \beta_n$, où $0 \leq \beta_n < 1$. □

Exercice 2.8. Soit $a > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$\mathcal{E}_n : x^n + x = a. \tag{2.3}$$

1. Montrer que pour n fixé, l'équation admet une unique solution positive, que l'on notera u_n.

2. Montrer que la suite (u_n) ainsi définie converge.

Solution.

1. Laissé au lecteur.

2. Tout d'abord, puisque $a = u_n^n + u_n \geq u_n$, la suite u est bornée. D'après B.W., l'ensemble de ses valeurs d'adhérence $\Lambda(u)$ est non vide. Soit $\lambda \in \Lambda(u)$ et φ extractice telle que $u_{\varphi(n)} \to \lambda$. Supposons par l'absurde que $\lambda > 1$. Alors, il existe un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow u_{\varphi(n)} \geq \frac{\lambda + 1}{2}$$

ce qui donne l'absurdité suivante :

$$a = u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)}^{\varphi(n)} \geq \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{\varphi(n)} \to +\infty.$$

Donc $\lambda \leq 1$. Dans le cas où $\lambda < 1$, on en déduit aisément que $u_{\varphi(n)} \to a$. Ainsi, $\Lambda(u) \subset \{a, 1\}$. En étudiant les positions relatives de 1 et a, on conclut que l'ensemble des valeurs d'adhérence est réduit à un singleton et que :
— si $a \geq 1$, u converge vers 1 ;
— sinon, u converge vers a.

□

Exercice 2.9. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{|u_n - u_{n-1}|}{2}$. Montrer que (u_n) converge.

Solution. Par récurrence immédiate,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{|u_1 - u_0|}{2^{n-1}}. \tag{2.4}$$

Si $p < q$, il reste à majorer $|u_p - u_q|$ par un ε fixé. Il suffit de récrire cette différence grâce à une somme bien choisie ($|u_p - u_q| = |\sum_{p+1}^{q} u_{k+1} - u_k|$), puis d'utiliser l'inégalité triangulaire ainsi que (2.4). On prouve ainsi que u est de Cauchy. Comme $\mathbb{C}$ est complet, il s'ensuit que u converge. □

Exercice 2.10. Pour $n \geq 1$, on s'intéresse au problème

$$\mathcal{E}_n : \tan x = x,\ n\pi - \pi/2 < x < n\pi + \pi/2. \tag{2.5}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}_n$ possède une unique solution notée θ_n.

2. Donner un développement asymptotique de θ_n.

Solution.

1. Comme toujours, laissé au lecteur. On a déjà que $\theta_n \sim n\pi$.

2. On aura remarqué que $\theta_n = n\pi + \mathrm{O}(1)$. Puisque $-\pi/2 < \theta_n - n\pi < \pi/2$ et $\tan(\theta_n - n\pi) = \tan\theta_n = \theta_n$, on a :

$$\theta_n = \arctan\theta_n + n\pi. \tag{2.6}$$

Ainsi, $\arctan\theta_n \to \pi/2$, ce qui donne

$$\theta_n = n\pi + \pi/2 + o(1). \tag{2.7}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\frac{\pi}{2} = \arctan\theta_n + \arctan\frac{1}{\theta_n}. \tag{2.8}$$

En repartant de (2.6), en y appliquant (2.8) puis en injectant dans le membre de droite (2.7) , on obtient :

$$\theta_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \tag{2.9}$$

□

Exercice 2.11. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série $\sum b_n$ converge.

1. Montrer que la série $\sum \frac{b_1+...+b_n}{n}$ diverge.

2. Montrer que la série $\sum (b_1...b_n)^{1/n}$ converge.

Solution. **1.** Il suffit de réaliser proprement une permutation de signes $\sum$ puis d'utiliser le fait que la série harmonique diverge pour conclure.

2. C'est une application de l'inégalité arithmético-géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'idée est d'écrire

$$(b_1...b_n)^{1/n} = \left(\frac{p_1b_1...p_nb_n}{p_1...p_n}\right)^{1/n} \tag{2.10}$$

où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bien choisie. Pas la peine d'aller chercher bien loin, on pose $p_k = k, k = 1, ..., n$. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On peut alors effectuer la majoration suivante :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (b_1...b_n)^{1/n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{b_1 2b_2...nb_n}{n!}\right)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} kb_k \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n)^{1/n}} \tag{2.11}$$

Il reste à estimer grossièrement $(n!)^{1/n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln n! = \sum_{k=2}^{n} \ln k \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t \mathrm{d}t = n\ln n + 1 - n \geq n\ln n - n \tag{2.12}$$

et donc

$$n! \geq \frac{n^n}{e^n}. \tag{2.13}$$

Cela permet d'écrire que

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (b_1...b_n)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} kb_k \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{e}{n^2}. \tag{2.14}$$

Or

$$\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{\mathrm{N}} \leq \frac{1}{k-1} \tag{2.15}$$

ce qui permet de conclure quant à la convergence de $\sum (b_1...b_n)^{1/n}$ puisque

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (b_1...b_n)^{1/n} \leq \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{kb_ke}{k-1} \leq 2e \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} b_k. \tag{2.16}$$

□

Exercice 2.12. Soit u une suite réelle convergente. Étudier la nature de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>*Solution*</u>. On s'attend à ce que la suite converge vers $l \in \mathbb{R}$ la limite de u. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}_1,\ |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.17}$$

Soit $n \geq \mathrm{N}_1$.

$$\begin{aligned}
|m_n - l| &= \frac{1}{2^n}\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(u_k - l)\right| & (2.18)\\
&\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|u_k - l| & (2.19)\\
&\leq \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}_1}\binom{n}{k}|u_k - l| + \sum_{k=\mathrm{N}_1+1}^{n}\binom{n}{k}|u_k - l|\right) & (2.20)\\
&\leq \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}_1}\binom{n}{k}|u_k - l| + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}\right) & (2.21)\\
&\leq \underbrace{\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}_1}\binom{n}{k}|u_k - l|}_{\text{Polynomiale en } n} + \frac{\varepsilon}{2} & (2.22)\\
& & (2.23)
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=0}^{\mathrm{N}_1}\binom{n}{k}|u_k - l| = \mathrm{O}(n^{\mathrm{N}_1})$ et donc $\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}_1}\binom{n}{k}|u_k - l| = \mathrm{O}(\frac{n^{\mathrm{N}_1}}{2^n})$. Soit N_2 tel que

$$\forall n \geq \mathrm{N}_2\ \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}_1}\binom{n}{k}|u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.24}$$

Soit $n \geq \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. On a bien $|m_n - l| \leq \varepsilon$. Conclusion :

$$\boxed{m_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l}$$

□

> **Exercice 2.13.** Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction dérivable telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| < 1$.
>
> **1.** Montrer que f admet un unique point fixe $\omega \in [a,b]$.
>
> **2.** Montrer que la suite u définie par $u_0 = c \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge et préciser sa limite.

<u>*Solution*</u>.

1. C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, ainsi que de l'inégalité des accroissements finis.

2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq \omega$. La fonction

$$p_\omega : \left\{\begin{array}{lcl} [a,b] & \to & [a,b] \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(\omega)}{x-\omega} \text{ si } x \neq \omega \\ \omega & \mapsto & f'(\omega) \end{array}\right.$$

est continue. En particulier, $\mathrm{M} = \max_{[a,b]} |p_\omega|$ est atteint. On a donc $\mathrm{M} < 1$. Une récurrence immédiate fournit

$$\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n - \omega| \leq \mathrm{M}^n |u_0 - \omega|. \tag{2.25}$$

Conclusion :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega}$$

□

Exercice 2.14. (RMS)
Étudier $\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. Première étape : majorer. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} \leq \frac{e}{e-1} \tag{2.26}$$

Deuxième étape : minorer proprement. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $1 \leq \mathrm{N} \leq n$.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \alpha_{\mathrm{N}} \tag{2.27}$$

Or $\alpha_{\mathrm{N}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1-e^{-\mathrm{N}}}{1-e^{-1}} = l_{\mathrm{N}}$ et $l_{\mathrm{N}} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{e-1}$. Donc pour un N choisi assez grand, $ł_{\mathrm{N}} \geq \frac{e}{e-1} - \varepsilon$ et donc pour n choisi assez grand et supérieur ou égal à N, on a :

$$\frac{e}{e-1} - 2\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{e}{e-1} \tag{2.28}$$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{e-1}}$. □

Exercice 2.15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels vérifiant $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u, noté $\Lambda(u)$, est un segment.

Chapitre 3

Développements asymptotiques

Exercice 3.1. Soit $x > 0$ tel que la suite de l'énoncé a un sens. Calculer, lorsqu'elle existe, la limite pour $x \to +\infty$ de
$$\frac{(x \ln x)^2[(x+1)^{1/x} - x^{1/x}]}{x^{x^{1/x}} - x}.$$

Solution. Si $x > 1$, alors $x^{x^{1/x}} > x$. On cherche un équivalent simple de $\mathrm{A}(x) = (x+1)^{1/x} - x^{1/x}$ et de $\mathrm{B}(x) = x^{x^{1/x}} - x$. Après un calcul soigneux, on tombe sur $\mathrm{A}(x) \sim 1/x^2$ et $\mathrm{B}(x) \sim \ln^2 x$. Ainsi, la limite cherchée est 1. □

Exercice 3.2. On considère l'application
$$\begin{array}{rcl} f : [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{x}. \end{array}$$
Montrer qu'il existe $\mathrm{A} > 1$ tel que la restriction de f à $[\mathrm{A}, +\infty[$ est une bijection. On cherchera un développement limité de la réciproque au voisinage de 0.

Solution. Bref étude de la fonction. Calculer, développer, réinjecter, calculer, développer, réinjecter. (On s'arrête là.) □

Exercice 3.3. Montrer que
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ x & \mapsto & x^7 \sin \dfrac{1}{x^{12}} \end{array}$$
admet un développement limité en 0 à l'ordre 6, mais pas à l'ordre 7.

Solution. On vérifie que c'est le cas à l'ordre 6. Par l'absurde, si f possède un développement limité en 0 à l'ordre 7, alors (puisque l'on a déjà $f(x) = o(x^6)$) on peut écrire $f(x) = ax^7 + o(x^8)$ d'où $\sin \dfrac{1}{x^{12}} = a + o(1)$ ce qui conduit à une contradiction en prenant $x_n = \dfrac{1}{(\pi/2 + n\pi)^{1/12}}$. □

Exercice 3.4. Calculer la valeur en 0 de la dérivée d'ordre 5 de la fonction $\phi : x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

Solution. Effectuer un développement limité à l'ordre 5. La régularité de ϕ fournit également un développement limité (formule de Taylor). L'unicité de ce développement permet de conclure. □

Exercice 3.5. Trouver le signe au voisinage de 0 de $\psi(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{1-\operatorname{sh} x} - \operatorname{sh}\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Exercice 3.6. Trouver le signe au voisinage de 0 de $\varphi(x) = \frac{\sin x}{1-\sin x} - \sin\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Solution. Effectuer en parallèle un développement limité des deux termes jusqu'à ce que ceux-ci se différencient. □

Exercice 3.7. Calcul approché de dérivée.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. On veut approcher $f'(0)$. En quoi la formule

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \tag{3.1}$$

est-elle meilleure que la formule usuelle ?

2. Pour quels couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est-on certains d'avoir

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a(f(h) - f(-h)) + b(f(2h) - f(-2h))}{h}.$$

3. Comment optimiser la formule précédente quant au choix de (a, b) ?

4. Adapter (3.1) pour le calcul approché de $f''(0)$ puis de $f^{(n)}(0)$ pour $n \geq 3$.

Exercice 3.8. Calculer les deux premiers termes du développement asymptotique de arccos en 1.

Exercice 3.9. Pour $n \geq 2$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{n^2 + k}{n^2 - k}$$

Montrer

$$u_n = e + \frac{e}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Solution. Au voisinage de 0,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \beta(x)(x^5)$$

où β est majorée. On calcule :

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{n^2+k}{n^2-k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n^2}}{1-\frac{k}{n^2}} \\ \ln u_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) - \ln\left(1-\frac{k}{n^2}\right) \end{aligned}$$

En remplaçant les ln par leur développement en 0, on trouve des expressions qui fournissent le résultat en repassant à l'exponentielle. $\square$

Chapitre 4

Séries numériques

Exercice 4.1. Comment approcher rapidement $\ln 2$?

<u>*Solution*</u>.

$$\begin{aligned}
\ln 2 = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{1/2} \frac{du}{1-u} \\
&= \int_0^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \sum_{k=0}^{n} x^k \, \mathrm{d}x + \underbrace{\int_0^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \, \mathrm{d}x}_{r_n}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + r_n.$$

Il ne reste plus qu'à majorer en valeur absolue le reste :

$$|r_n| = \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{1-x} \leq \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{1/2} \leq \frac{1}{(n+2)\times 2^{n+1}}.$$

$\square$

Exercice 4.2. Prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas général et en déduire son écriture pour les séries numériques.

<u>*Solution*</u>. On se donne E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle .|. \rangle$ dont on note $\|.\|$ la norme associée. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda \langle x|y \rangle$$

ce qui fournit

$$(2\langle x|y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

c'est-à-dire

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

□

Exercice 4.3. Montrer que $\cos 1 \notin \mathbb{Q}$ en utilisant le fait que

$$\cos 1 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Solution. Supposons par l'absurde que $\cos 1 \in \mathbb{Q}$. Ainsi, $\cos 1 = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$ où $\mathrm{D} \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{N} \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{N} \wedge \mathrm{D} = 1$. L'idée est souvent la même : coincer strictement un entier entre deux entiers consécutifs.

En notant (S_n) la suite des sommes partielles de la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$, après une rapide étude, on a la première inégalité :

$$\mathrm{S}_{2m+1} < \cos 1 < \mathrm{S}_{2m}$$

ou plus précisément,

$$\mathrm{S}_{2m} > \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} > \mathrm{S}_{2m} - \frac{1}{(4m+2)!}$$

ce qui fournit la contradiction souhaitée en choisissant m tel que $\mathrm{D}|(4m)!$ puisqu'alors :

$$(4m)!\mathrm{S}_{2m} > \underbrace{(4m)!\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}}_{\in\mathbb{Z}} > (4m)!\mathrm{S}_{2m} - \frac{1}{(4m+2)(4m+1)} \geq (4m)!\mathrm{S}_{2m} - \frac{1}{2}.$$

□

Exercice 4.4. Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Solution. $e = \sum_{n=0}^\infty \dfrac{1}{n!}$. On suppose que $e = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \geq 1$ et $p \wedge q = 1$. Le but est toujours de coincer un entier entre deux entiers consécutifs. Il suffit d'écrire :

$$pq! = qq!e = \sum_{n=0}^{q} \frac{qq!}{k!} + q\underbrace{\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}}_{\alpha_q}$$

Ainsi $pq! \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n=0}^q \dfrac{qq!}{k!} \in \mathbb{N}^*$. Or :

$$0 < \alpha_q < q\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(q+1)...(q+i)}\right) < q\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^i} = 1.$$

C'est impossible, donc $e \notin \mathbb{Q}$. □

Exercice 4.5. Calculer
$$\sum_{n=2}^{\infty}(\ln(n-1) - 2\ln n + \ln(n+1)).$$

Exercice 4.6. Montrer que
$$\eta(s) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)$$
pour $s > 1$.

Solution. Soit $s > 1$.
$$\begin{aligned}\eta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^s} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^s}\\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^s} - \zeta(s)\\ &= \frac{2}{2^s}\zeta(s) - \zeta(s)\\ &= (2^{1-s} - 1)\zeta(s)\end{aligned}$$
$$\boxed{\eta(s) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s)}$$

□

Exercice 4.7. Donner un développement asymptotique à 4 termes de $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4.8. Justifier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = n\ln\left(\dfrac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right)$ pour $n \geq 2$.

Solution. On peut d'abord chercher un équivalent simple pour justifier la convergence. Ici, on cherche directement une décomposition en éléments simples des sommes partielles. On a :
$$\mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X} - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)^3$$
et
$$\mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 = \mathrm{X}^3(\mathrm{X}+2)$$
ce qui fournit
$$u_n = n\ln(n-1) + 3n\ln(n+1) - 3\ln n - n\ln(n+2)$$

En notant (S_n) la suite des sommes partielles, une fois une scission tout à fait licite réalisée et le calcul mené, on obtient
$$\mathrm{S}_n = -3\ln 2 + \ln 3 + \epsilon_n$$
où $\epsilon_n = -(n+1)\ln n + (2n+1)\ln n - n\ln(n+2) = o(1)$. Ainsi, on peut conclure :
$$\sum_{n=2}^{\infty} n\ln\left(\frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right) = -3\ln 2 + \ln 3.$$

□

Exercice 4.9. Montrer que
$$\ln n! \sim n \ln n.$$

Solution. On peut bien sûr utiliser la formule de Stirling. Une autre méthode consiste à utiliser le théorème de sommation des équivalents en s'intéressant à la série

$$sum k \ln k - (k-1)\ln(k-1).$$

En effet,
$$k \ln k - (k-1)\ln(k-1) \sim \ln k,$$
de quoi on déduit le résultat. □

Exercice 4.10. Expliciter la vitesse de convergence de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{k^4}$.

Solution. Comparaison série/intégrale. □

Exercice 4.11. Soit $\sum u_n$ une série à terme général réel. On définit f la fonction qui à t réel positif associe $u_{\mathrm{E}(u)}$. Montrer que la série converge ssi l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de f converge simplement.

Exercice 4.12. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante. Montrer que la série

$$\sum \int_{n-1}^{n} f - f(n)$$

converge.

Solution. Minorer le terme général par 0 puis le majorer par $f(0)$. □

Exercice 4.13. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Solution. On note (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n}$. Soit $n \leq 2$.

$$\mathrm{S}_n - \ln(n) - \mathrm{S}_{n-1} + \ln n - 1 = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \tag{4.1}$$

Donc la série $\sum (\mathrm{S}_n - \ln(n) - \mathrm{S}_{n-1} + \ln(n-1))$ converge absolument, donc converge. Ainsi $(\mathrm{S}_n - \ln n)_{n\geq 1}$ converge et il existe γ tel que pour $n \to +\infty$,

$$\mathrm{S}_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

Le théorème de sommation des équivalents pour le reste d'une série convergente permet d'obtenir immédiatement à partir de (4.1) que

$$\mathrm{S}_n - \ln n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$$

On réitère la même méthode un nombre nécessaire de fois afin d'obtenir les autres termes du développement. □

Exercice 4.14. Soit $(u_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\mathrm{C}}{n^b} + o\left(\frac{1}{n^b}\right).$$

Que peut-on dire de la convergence de $\sum u_n$?

Solution. Distinction de cas. □

Exercice 4.15. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Que dire de la convergence de la série $\sum \left(1 - \frac{1}{n^\beta}\right)^n$?

Solution. Pour $n \geq 1$, on note $u_n = \left(1 - \frac{1}{n^\beta}\right)^n$.

— Si $\beta = 1$, la série diverge grossièrement puisqu'alors $u_n \to e^{-1}$.

— Si $\beta > 1$: pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^\beta > n$ ce qui implique que la série diverge puisque

$$\left(1 - \frac{1}{n^\beta}\right) > \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

— Si $0 < \beta < 1$: soit $\alpha > 0$. On trouve après calcul que $\ln(n^\alpha u_n) = -n^{1-\beta} + o(n^{1-\beta})$. Ainsi, $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui permet de conclure, la série converge.

— Si $\beta = 0$, la série converge trivialement.

— Enfin, si $\beta < 0$, la série converge grossièrement.

Bilan :

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{n^\beta}\right)^n \text{ converge } \iff 0 \leq \beta < 1.$$

□

Exercice 4.16. Montrer que $\sum \frac{1}{\ln \ln n^{\ln \ln n}}$ diverge.

Solution. Comparaison logarithmique : $u_n = \ln \ln n$. u_n est strictement positive à partir d'un certain rang. Soit $\alpha > 0$. Pour n assez grand,

$$\ln(n^\alpha u_n) = \alpha \ln n - (\ln \ln n) \ln(\ln \ln n)$$

or $\ln(\ln \ln n) = o(\ln \ln n)$ et $(\ln \ln n)^2 = o(\ln n)$ lorsque $n \to +\infty$, donc

$$\ln(n^\alpha u_n) = \alpha \ln n + o(\ln n)$$

ce qui fournit, pour $0 < \alpha < 1$,

$$\frac{1}{n} = o(u_n)$$

Comme u_n est de signe constant à partir d'un certain rang, finalement la série diverge. □

Exercice 4.17. Soit $\alpha > 1$. Montrer que pour $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha - 1) n^{\alpha - 1}}.$$

Solution. Soit $k \geq 1$.

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

d'où on déduit par encadrement que $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \sim \frac{1}{k^\alpha}$. La série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ étant convergente, on peut appliquer le théorème de sommation des équivalents pour le reste. Le calcul de $\int_n^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ permet de conclure.

Connaissant le résultat, la second méthode à privilégier est d'utiliser le théorème de sommation des équivalents en montrant que pour $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

□

Exercice 4.18. Soit $\alpha < 1$. Montrer que pour $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Solution. Similaire à celle de l'exercice 4.17.

□

Remarque 4.18.1. On réalise en fait dans les exercices 4.17 et 4.18 ce que l'on pourrait appeler une *intégration discrète.*

Exercice 4.19. Donner un équivalent pour $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^n 2^k \ln k.$$

Solution. Effectuer une transformation suite/série. □

Exercice 4.20. Soit $\alpha \neq 0$. Nature de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n + \frac{(-1)^n n}{\ln^\alpha n}}.$$

Solution. Si $\alpha > 0$, un développements asymptotique du terme général montre que celui-ci présente un terme d'ordre 1 vérifiant le critère spécifique des séries alternées, suivit d'un autre terme dépendant de α :

$$\frac{(-1)^n}{n + \frac{(-1)^n n}{\ln^\alpha n}} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n \ln^\alpha n} + o\left(\frac{1}{n \ln^\alpha n}\right).$$

On en déduit que dans le cas traité, la série converge ssi $\alpha > 1$. □

Exercice 4.21. Soient $\alpha, \beta > 0$ distincts. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}.$$

Exercice 4.22. Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)n}{\sqrt{n} + (-1)^n \ln n}.$$

Remarque 4.22.1. Les deux exercices précédents montrent que le terme général d'une série alternée ne vérifie *a priori* pas les hypothèses de décroissance vers 0 du critère spécifique, et qu'il ne faut pas négliger les termes suivants dans le développement limité de celui-ci.

Exercice 4.23. Soient $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Solution. Les cas autres que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $0 < \alpha \leq 1$ sont laissées au lecteur. Dans ce cas particulier, on utilise le fait que la suite S_n des sommes partielles de la série $\sum e^{in\theta}$ est bornée : en effectuant une transformation d'Abel, il vient pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{S}_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\mathrm{S_N}}{\mathrm{N}} - \mathrm{S}_1 = \sum_{n=2}^{\mathrm{N}-1} \frac{\mathrm{S}_n}{n(n+1)} + \frac{\mathrm{S_N}}{\mathrm{N}} - \mathrm{S}_1.$$

On peut alors conclure. □

Conséquence : La série $\sum \dfrac{\sin n}{n}$ converge.

Exercice 4.24. Soient (a_n) et (u_n) deux suites, la première à valeurs réelles et la seconde à valeurs complexes, telles que :

(i) (a_n) tend en décroissant vers 0 ;

(ii) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est bornée.

Montrer que $\sum a_n u_n$ converge.

Solution. Une transformation d'Abel sur les suites des sommes partielles permet de prouver le résultat. Si l'on note

$$\mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \text{ et } \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$$

on obtient :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}_k(a_k - a_{k+1}) + \mathrm{T}_n a_{n+1}.$$

Puisque (T_n) est bornée, le second terme du membre de droite tend vers 0. D'autre part,

$$|\mathrm{T}_k(a_k - a_{k+1})| = \mathrm{I}(a_k - a_{k+1})$$

et $a_k - a_{k+1} \geq 0$. Puisque $\sum a_k - a_{k+1}$ converge, la démonstration est achevée. □

Exercice 4.25. Soit θ un réel non congru à 0 modulo 2π. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}+\sin n\theta}.$$

Solution. Après un développement limité, on peut se ramener à l'exercice 4.23. □

Exercice 4.26. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers. Prouver la divergence de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.

Solution. On suppose par l'absurde que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}.$$

On a

$$\ln(\Pi_n) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right).$$

Or

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{1}{p_k}$$

donc $(\Pi_n)_{n\geq 1}$ converge vers un certain $\mathrm{L} \in \mathbb{R}_+^*$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M} = \lfloor \ln n \rfloor$ et $\nu \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$p_\nu \leq n < p_{\nu+1}.$$

On obtient alors

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{0\leq i_1,\ldots,i_\nu \leq \mathrm{M}} \frac{1}{p_1^{i_1} \ldots p_\nu^{i_\nu}} = \prod_{k=1}^{\nu} \left(\sum_{j=0}^{\mathrm{M}} \frac{1}{p_k^j}\right) \leq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \leq \mathrm{L}$$

On nage en plein délire les amis !

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n} \text{ diverge}}$$

□

Exercice 4.27. Nature de la série

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}\right).$$

Solution. Utiliser des paquets bien choisis. □

Exercice 4.28 (Permutation des termes d'une série)**.** Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, construire une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^*)$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Solution. L'idée est d'envoyer

— les entiers congrus à 1 modulo 3 vers les entiers congrus à 1 modulo 4,
— les entiers congrus à 2 modulo 3 vers les entiers congrus à 3 modulo 4,
— les entiers congrus à 0 modulo 3 vers les entiers congrus à 0 ou 2 modulo 4.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit donc la permutation σ par :

— $\sigma(3n-2) = 4n-3$,
— $\sigma(3n-1) = 4n-1$,
— $\sigma(3n) = 2n$.

Il reste alors à calculer la valeur de la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3n}\frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{4k-3+1}}{4k-3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{4k-1+1}}{4k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k}\\ &= \sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{2j-1} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}\\ &= \sum_{j=1}^{4n}\frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{2j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}\end{aligned}$$

En utilisant le fait que, pour $n \to +\infty$,

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on obtient le résultat demandé. □

Exercice 4.29 (Théorème de convergence dominée)**.** Soient $(c_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

— On suppose que $\sum a_k$ converge et que $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ |c_{n,k}| \leq a_k$.
— On suppose de plus que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{n,k} \to l_k \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} l_k.$$

Solution. De la domination des $(c_{n,k})$ par les (a_k) on déduit la convergence absolue de la série $\sum c_{n,k}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$; en passant à la limite, les (l_k) sont également dominés par les (a_k), et donc de même $\sum l_k$ converge absolument. Après un petit travail de décomposition de la somme $\sum_{k=0}^{\infty}(c_{n,k} - l_k)$ pour n quelconque, il apparait judicieux de la séparer en trois, afin d'appliquer les hypothèses de domination. La suite va éclairer le propos.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N tel que $\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{3}$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} |c_{n,k}| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Soit maintenant $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall k \in [\![0, \mathrm{N}]\!]\,, |c_{n,k} - l_k| < \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{N}+1)}.$$

Soit $n \geq \max(\mathrm{N}+1, n_0)$. On alors :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{\infty}(c_{n,k} - l_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}(c_{n,k} - l_k) + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} c_{n,k} - \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} l_k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} |c_{n,k} - l_k| + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} |c_{n,k}| + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} |l_k| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} a_k \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} l_k}$$

□

Remarque 4.29.1. L'hypothèse de domination est bien entendu nécessaire : elle permet de contrôler tous les termes à la fois, sans quoi l'interversion peut donner des résultats absurdes. On peut par exemple considérer les suites définies de la façon suivante [1], pour $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{si } n \neq k \\ 1 + \frac{1}{k^2} & \text{si } n = k. \end{cases}$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $c_{n,k} \longrightarrow \frac{1}{k^2}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, tandis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par exemple

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,k} > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} > \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 4.30 (Théorème de Riemann)**.** Soit $\sum a_n$ une série simplement convergente (c'est-à-dire que $\sum_0^{\infty} a_n = +\infty$). Montrer que

$$\forall\, l \in \bar{\mathbb{R}}, \quad \exists\, \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^*), \quad \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l.$$

Exercice 4.31. Soit (a_n) une suite de réels positifs. Montrer que $\prod_{n\geq 1}(1 + a_n)$ converge ssi $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

1. Merci à Félix Lequen pour cet exemple.

<u>*Solution*</u>. Il suffit de prouver les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\prod_{n\geq 1}(1+a_n) \text{ converge } &\iff \sum_{n\geq 1}\ln(1+a_n) \text{ converge}\\ &\iff \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge.}\end{aligned}$$

N.B. : Un produit tendant vers 0 diverge. □

Exercice 4.32. Soit $\sum_{a_n}$ une série réelle telle que $\sum a_n^2$ converge. Montrer que pour $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = o(\sqrt{n}).$$

<u>*Solution*</u>. L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit seulement un $\mathrm{O}(\sqrt{n})$. Mais c'est déjà une première idée qui se révèle être la bonne si on l'applique un peu plus subtilement.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \sum_{k} = n + 1^{+\infty} a_k^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq \mathrm{N}+1$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k\right| + \left|\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} a_k\right|\\ &\leq \sqrt{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k^2 + \sqrt{n-\mathrm{N}}\sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} a_k^2\\ &\leq \sqrt{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k^2 + \sqrt{n}\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Soit $\mathrm{N}' \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \sqrt{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k^2 \leq \sqrt{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}') + 1$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &\leq \sqrt{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k^2 + \sqrt{n}\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \sqrt{n}\varepsilon\end{aligned}$$

□

Chapitre 5

Intégration : convergence, comparaison avec séries

Exercice 5.1. Montrer que
$$\int_0^{\infty} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta$$
diverge.

Solution. On suppose par l'absurde que l'intégrale converge. On note A sa limite. Alors :
$$\mathrm{A} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2n\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta = 0.$$
Mais on a également :
$$\mathrm{A} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2n\pi+\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta = 1$$
D'où $0 = 1$, absurde. $\square$

Exercice 5.2 (Intégrales de Bertrand)**.** Soient α et β des réels. On considère l'intégrale suivante :
$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha} \ln^{\beta} t} /$$
Montrer que :
- si $\alpha > 1$, l'intégrale converge ;
- si $\alpha < 1$, elle diverge ;
- si $\alpha = 1$, l'intégrale converge ssi $\beta > 1$.

Exercice 5.3 (Formule de Stirling)**.** Montrer que
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Solution. Évaluons asymptotiquement la suite définie pour $n \geq 1$ par
$$\mathrm{A}_n = \ln n! - \int_{1/2}^{n+1/2} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Pour prouver la convergence de la suite, on s'intéresse à la nature de la série $\sum(\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n)$. Sachant qu'une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto x \ln x - x$, un calcul asymptotique donne $\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n = \mathrm{O}(1/n^2)$ ce qui permet de conclure quant à la convergence de la suite (A_n). On note L la limite en question. Par continuité de l'exponentielle et en manipulant brièvement les équivalents, on en déduit que

$$n! \sim e^{\mathrm{L}} e^{\int_{1/2}^{n+1/2} \ln t \,\mathrm{d}t}.$$

Le calcul asymptotique de l'intégrale en exposant permet de conclure qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que

$$n! \sim \mathrm{K} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

On peut montrer à l'aide des intégrales de Wallis que $\mathrm{K} = \sqrt{2\pi}$. En effet,

$$\mathrm{W}_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

□

Remarque 5.3.1. Se reporter à l'exercice 20.6 pour une autre preuve de la formule de Stirling.

Chapitre 6

Dénombrabilité, puissance du continu

Exercice 6.1. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est algébrique si et seulement si il existe un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$ annulant z. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Solution. Il suffit d'écrire :

$$\mathbb{A} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{P \in \mathbb{Z}_N[X]} P^{-1}(\{0\}).$$

$\square$

Exercice 6.2 (Diagonale de Cantor)**.** Montrer que $[0,1]$ est indénombrable.

Exercice 6.3. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est-il équipotent à $\mathbb{R}$?

Solution. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}}$. Alors on a, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de f et g, égalité de f et g.

On peut donc injecter $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, donc dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et le tour est joué. $\square$

Exercice 6.4. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dénombrable.

Solution. Il suffit de considérer, en notant

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{x^-} f < \lim_{x^+} f\},$$

l'application injective

$$x \in \mathcal{D} \longmapsto r \in \mathbb{Q} \cap]\lim_{x^-} f, \lim_{x^+} f[.$$

$\square$

Exercice 6.5. Soit A une partie non dénombrable de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\left\{ \sum_{a \in F} a \mid F \subset A \text{ et } F \text{ finie} \right\}$$

est non majorée.

Exercice 6.6. Montrer que X n'est jamais équipotent à $\mathcal{P}(\mathrm{X})$.

Solution. On raisonne par l'absurde en se donnant $\varphi \to \mathcal{P}(\mathrm{X})$ bijective. On pose

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{X} \mid \{x\} \notin \varphi(\mathrm{X})\}$$

et on constate que $\mathrm{A} \notin \varphi(\mathrm{X})$. $\square$

Chapitre 7

Familles sommables

Exercice 7.1. On s'intéresse à la série convergente $\sum \frac{1}{2^n - 1}$. Pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$, on note $div(N)$ le cardinal de l'ensemble de ses diviseurs. Montrer que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\operatorname{div}(N)}{2^N}.$$

<u>*Solution*</u>.

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^{nq}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(q+1)}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^{mq}} \end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigsqcup_{N \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\{(m,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, mq = N\}}_{A_N} \tag{7.1}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} S = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{mq}} = \sum_{(m,q) \in {\mathbb{N}^*}^2} \frac{1}{2^{mq}} \\ &= \sum_{N \in \mathbb{N}^*} \sum_{(m,q) \in A_N} \frac{1}{2^{mq}} \\ &= \sum_{N \in \mathbb{N}^*} \sum_{mq = N} \frac{1}{2^{mq}} \\ &= \sum_{N \in \mathbb{N}^*} \frac{\operatorname{div}(N)}{2^N} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\operatorname{div}(N)}{2^N}. \end{aligned}$$

□

Exercice 7.2. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ dont on connait la décomposition en nombres premiers.

1. Calculer le cardinal de l'ensemble des diviseurs de N, noté $|div(\mathrm{N})|$.
2. Calculer
$$\frac{\sum_{d\in \mathrm{div}(\mathrm{N})} d}{|\mathrm{div}(\mathrm{N})|}.$$
3. Calculer
$$\left(\prod_{d\in \mathrm{div}(\mathrm{N})} d\right)^{\dfrac{1}{|\mathrm{div}(\mathrm{N})|}}.$$

Solution. **1.** Écrire $\mathrm{N} = p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$. On vérifie aisément que :
$$|\mathrm{div}(\mathrm{N})| = (1+\alpha_1)...(1+\alpha_s). \tag{7.2}$$

2. On a alors :
$$\begin{aligned}\frac{\displaystyle\sum_{d\in div(\mathrm{N})} d}{|div(\mathrm{N})|} &= \frac{\displaystyle\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\prod_{i=1}^n [\![1,\alpha_i]\!]} p_1^{\beta_1}...p_s^{\beta_s}}{(\alpha_1+1)...(\alpha_s+1)} = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^s\left(\sum_{\beta_i=1}^{\alpha_i} p_i^{\beta_i}\right)}{(\alpha_1+1)...(\alpha_s+1)}\\ &= \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{(p_i-1)(\alpha_i+1)}.\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\prod_{(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\prod_{i=1}^n [\![1,\alpha_i]\!]} p_1^{\beta_1}...p_s^{\beta_s} &= \prod_{i=1}^s\prod_{\beta_i=0}^{\alpha_i}\left(p_i^{\beta_i}\right)^{(\alpha_1+1)...(\alpha_{i-1}+1)(\alpha_{i+1}+1)...(\alpha_s+1)}\\ &= \prod_{i=1}^s\prod_{\beta_i=0}^{\alpha_i}\left(p_i^{(\alpha_1+1)...(\alpha_{i-1}+1)(\alpha_{i+1}+1)...(\alpha_s+1)}\right)^{\beta_i}\\ &= \prod_{i=1}^s\left(p_i^{(\alpha_1+1)...(\alpha_{i-1}+1)(\alpha_{i+1}+1)...(\alpha_s+1)}\right)^{\dfrac{\alpha_i(\alpha_i+1)}{2}}\\ &= \prod_{i=1}^s\left(p_i^{(\alpha_1+1)...(\alpha_s+1)}\right)^{\dfrac{\alpha_i}{2}}\\ &= \prod_{i=1}^s\left(p_i^{\dfrac{\alpha_i}{2}}\right)^{(\alpha_1+1)...(\alpha_s+1)} = (\sqrt{n})^{|\mathrm{div}(\mathrm{N})|}\end{aligned}$$

D'où
$$\left(\prod_{d\in \mathrm{div}(\mathrm{N})} d\right)^{\dfrac{1}{|\mathrm{div}(\mathrm{N})|}} = \sqrt{n}. \tag{7.3}$$

□

Exercice 7.3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la nature de la série de terme général $\mathrm{div}(n)z^n$.

Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$.

Si $|z| \geq 1$, alors $|\mathrm{div}(n)z^n| \geq |z|^n \geq 1$, or $\sum z^n$ diverge donc $\sum \mathrm{div}(n)z^n$ diverge.

Si $|z| \leq 1$, alors $|\mathrm{div}(n)z^n| \leq n|z|^n$ et puisque $\sum nz^n$ est absolument convergente (car $n|z|^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$), la série $\sum \mathrm{div}(n)z^n$ est absolument convergente, donc convergente. On peut donc définir :

$$\begin{cases} f : \mathcal{B}_o(0,1) & \to & \mathbb{C} \\ \quad z & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{div}(n)z^n \end{cases}.$$

La famille $(\mathrm{div}(n)z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{div}(n)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{1}(m|n) \right) z^n \tag{7.4}$$

La famille $(\mathbf{1}(m|n)z^n)_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ? [1] On vérifie aisément qu'elle l'est en sommant les modules (on tombe sur $f(|z|)$ naturellement). On peut ainsi permuter les signes sommes :

$$f(z) = \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}(m|n)z^n = \sum_{m\geq 1}\sum_{k\geq 1} z^{mk} = \sum_{m\geq 1} \frac{z^m}{1-z^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{1-z^m} \tag{7.5}$$

□

Exercice 7.4. On note ζ la fonction de Riemann. Montrer que

$$\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2} \\ n\wedge m=1}} \frac{1}{n^2m^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}.$$

Exercice 7.5 (Fonction de Möbius)**.** Soit $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ définie par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^s & \text{si } n = p_1 ... p_s \text{ où les } p_i \text{ sont des nombres permiers distincts} \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \end{cases}$$

1. Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que
$$\sum_{\substack{1\leq d \\ d|n}} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$
3. Soit $\alpha > 1$. Monter que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} = \frac{1}{\zeta(\alpha)}.$$

1. L'indicatrice : « Si vous mentez, on ne vous châtie pas publiquement, ce qui serait mieux, mais vous marquez plutôt 0 point parce que l'on est dans une société laxiste. »

Exercice 7.6. Soit $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de réels strictement positifs. On suppose que

$$\sup_{\mathrm{J} \text{ partie finie de } \mathrm{I}} \sum_{j\in \mathrm{J}} a_j < +\infty.$$

Montrer que I est dénombrable.

Chapitre 8

Topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Exercice 8.1. Soit $x \in [0,1[$ et $p \geq 2$ un entier. Montrer qu'il existe une unique suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ d_n \in [\![0, p-1]\!]$

(ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \dfrac{1}{p^n}$

(iii) (d_n) ne stationne pas en $p-1$.

<u>*Solution*</u>.
Existence
On définit les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$x_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*\ d_n = \lfloor px_{n-1} \rfloor \text{ et } x_n = px_{n-1} - d_n. \tag{8.1}$$

On vérifie que $\forall n$, $x_n \in [0,1[$ et $0 \leq d_n \leq p-1$. On montre ensuite par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{p^k} + \frac{x_n}{p^n}$$

ce qui permet de conclure que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{p^n}$$

puisque $\frac{x_n}{p_n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En supposant par l'absurde que (d_n) stationne en $p-1$, il suffit de prendre n_0 tel que $(d_n)_{n\geq n_0}$ est constante égale à $p-1$. On a alors par un simple calcul $x_{n_0} = 1$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

Unicité
En raisonnant une nouvelle fois par l'absurde, on arrive au même style de contradiction. $\square$

Exercice 8.2 (Développement en série de Engel)**.** Soit $x \in]0,1]$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(q_n) \in (\mathbb{N}\backslash\{0,1\})^{\mathbb{N}^*}$ croissante et telle que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 \cdots q_n}.$$

2. Montrer que x est rationnel ssi (q_n) est stationnaire.

Solution. **1.** On exclu le cas trivial $x = 1$ qui correspond à la suite constante égale à 2. Soit $x \in]0,1[$. Pour se donner une idée, on suppose qu'une telle suite existe. On remarque alors que

$$q_1 x = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \tag{8.2}$$

d'où on déduit que $0 < q_1 x - 1 < 1$. On a donc $q_1 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1$ et $x_1 = q_1 x - 1$, puis par récurrence immédiate, on en déduit que :

$$q_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \; q_{n+1} = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1 \tag{8.3}$$

$$x_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \; x_{n+1} = q_{n+1} x_n - 1 \tag{8.4}$$

Ainsi si x admet un tel développement, il est unique.

Il convient maintenant de vérifier que les relations de récurrence ci-dessus définissent bien deux suites répondant aux exigences de l'énoncé, notamment que (x_n) ne s'annule pas. Montrons donc par récurrence que $\forall n$, $x_n \in]0,1]$. C'est bien le cas pour $x_0 = x$. Supposons que cela soit vrai au rang n, alors comme

$$\frac{1}{x_n} < q_{n+1} \leq \frac{1}{x_n} + 1 \tag{8.5}$$

on a $x_{n+1} = q_{n+1} x_n - 1 \leq x_n \leq 1$. Par ailleurs cela montre que la suite (x_n) est décroissante, ce qui nous fournit la croissance de la suite (q_n) avec $q_1 \geq 2$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\sum \frac{1}{q_1 \cdots q_n}$ converge avec x pour somme. On montre par récurrence que

$$x = x_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_1 \cdots q_k} + \frac{x_n}{q_1 \cdots q_n} \tag{8.6}$$

et en minorant le second terme à droite de l'égalité par le reste de $\sum \frac{1}{2^n}$ on conclut.

2. Pour le sens direct, trouver une suite décroissante d'entier (division euclidienne !). Pour le sens réciproque, le calcul est laissé au lecteur.

□

Exercice 8.3 (Nombres de Liouville)**.** **1.** Soit P un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré $m \geq 1$, et $x \in \mathbb{R}$ une racine de P. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall\ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cap [x-1, x+1],\ \left(\mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0 \Rightarrow \left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{\mathrm{K}}{|b|^m}\right).$$

2. Soit $(u_n) \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}}$ strictement positive à partir d'un certain rang. Soit

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{10^{n!}}.$$

Montrer que x est transcendant sur $\mathbb{Q}$. [a]

[a]. x est un nombre de Liouville.

Solution. **1.** Avec $\mathrm{M} = \|\mathrm{P}'\|_\infty$ sur $[x-1, x+1]$, l'inégalité des accroissements finis fournit pour un rationnel $\frac{a}{b}$ de ce segment non racine de P :

$$\left|\mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|\mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right) - \mathrm{P}(x)\right| \leq \mathrm{M}\left|x - \frac{a}{b}\right|.$$

Par ailleurs, si l'on note a_0, a_1, ... , a_m les coefficients de P,

$$b^m \mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k b^{m-k} a^k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

De là, $\left|b^m \mathrm{P}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \geq 1$ et finalement :

$$\boxed{\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{\mathrm{M} b^m}}$$

2. On raisonne par l'absurde en appliquant l'inégalité précédent à la somme tronquée de celle définissant x.

□

Chapitre 9

Espaces métriques, suites, ouverts, fermés

Exercice 9.1. Soit X une partie non vide de E un espace métrique dont on note d la distance associée. Montrer que
$$d_{\mathrm{X}} : \begin{cases} \mathrm{E} & \to & \mathbb{R}_+ \\ a & \mapsto & \inf_{x\in\mathrm{X}} \mathrm{d}(a,x) \end{cases}$$
est continue.

Solution. On montre que d_{X} est 1-lipschitzienne. Soit $(a,b) \in \mathrm{E}^2$ et $x \in \mathrm{X}$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on a :
$$\mathrm{d}(a,x) \leq \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,x) \tag{9.1}$$
ce qui fournit
$$\mathrm{d}(a,\mathrm{X}) \leq \mathrm{d}(b,\mathrm{X}) + \mathrm{d}(a,b) \tag{9.2}$$
et permet de conclure par symétrie des rôles de a et b. □

Exercice 9.2. Soient a et b dans $\mathbb{R}^*$ tels que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $a\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution. **1.** Il s'agit d'appliquer le

Lemme 9.2.1. *Soit* G *un sous-groupe de* $(\mathbb{R},+)$.
Ou bien G *est dense dans* $\mathbb{R}$, *ou bien* G *est monogène.*

Preuve. On suppose $\mathrm{G} \neq \varnothing$. On pose
$$\mathrm{G}_+^* = \mathrm{G} \cap \mathbb{R}_+^*$$
et
$$m = \inf \mathrm{G}_+^*.$$

— Si $m \in \mathrm{G}_+^*$: on montre facilement (par division euclidienne notamment) que $\mathrm{G} = m\mathbb{Z}$.
— Si $m \notin \mathrm{G}_+^*$: on construit dans G des éléments arbitrairement proches de m, d'où, par différence, on a $]0,\varepsilon[\cap \mathrm{G} \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit $m = 0$ et $\overline{\mathrm{G}} = \mathbb{R}$.

On montre en raisonnant par l'absurde que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ n'est pas monogène, donc est dense dans $\mathbb{R}$ d'après le lemme.

2. On veut montrer que $a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On peut supposer $a>0$ (puisque X dense $\Leftrightarrow$ $-$X dense) et $b>0$ (puisque $b\mathbb{Z}=-b\mathbb{Z}$).
Soit $\varepsilon>0$. Montrons que
$$a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}\cap]0,\varepsilon[\neq\varnothing.$$
On raisonne par l'absurde en supposant $a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}\cap]0,\varepsilon[=\varnothing$. Or la question précédente nous assure que
$$a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}\cap]0,\varepsilon[\neq\varnothing.$$
On dispose donc de $p\in\mathbb{N}^*$ et $q\in\mathbb{Z}$ tels que
$$0<-ap+bq<\varepsilon$$
De même,
$$a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}\cap]0,-ap+bq[\neq\varnothing.$$
donc on dispose de $p'\in\mathbb{N}^*$ et $q'\in\mathbb{Z}$ tels que
$$0<-ap'+bq'<-ap+bq<\varepsilon.$$
On construit par récurrence $((p_n,m_n)_{n\geq 0}\in(\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ avec $(p_0,m_0)=(p,q)$ et pour tout $n\geq 0$:
$$0<-ap_{n+1}+bm_{n+1}<-ap_n+bm_n<\varepsilon.$$
On a donc pour tout $n\geq 0$
$$0<\underbrace{a(p_{n+1}-p_n)+b(m_n-m_{n+1})}_{\in a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}}<\varepsilon$$
donc $p_{n+1}-p_n<0$ pour respecter l'hypothèse de départ, ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$. C'est impossible puisque (p_n) est une suite d'entiers (strictement) positifs.
$$\forall\,\varepsilon>0,\quad a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}\cap]0,\varepsilon[\neq\varnothing.$$
Montrons que $\mathbb{R}_+^*\subset\overline{a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}}$. Soient $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon>0$. Montrons que
$$a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}\cap]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\neq\varnothing.$$
Soit $z\in a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}\cap]0,\varepsilon[$. Soit $p\in\mathbb{Z}$ tel que
$$pz\leq x+\varepsilon\leq pz+z$$
Or
$$pz\geq x+\varepsilon-z\leq x>0$$
donc $p\in\mathbb{N}^*$ et $pz\in a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}$.
$$|x-pz|<\varepsilon$$
On montre de même que $\mathbb{R}_-\subset\overline{a\mathbb{N}+b\mathbb{Z}}$.

□

Exercice 9.3. Montrer que $\mathrm{A}=\{\sqrt{n}-m^2,\ (m,n)\in\mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution. Pour $x \in \mathbb{R}$, considérer

$$n_m = \lfloor (x+m^2)^2 \rfloor$$

qui vérifie alors

$$\mathrm{A} \ni \sqrt{n_m} - m^2 = \sqrt{(x+m^2)^2 + \mathrm{O}(1)} - m^2 \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} x.$$

□

Exercice 9.4. Montrer que l'intersection de deux ouverts denses d'un espace métrique est un ouvert dense.

Solution. Soit $x \in \mathrm{E}$ et U et V deux ouverts denses de E. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $u \in \mathrm{U}$ tel que $d(x,u) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $0 < r \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tel que $\mathrm{B}_o(u,r) \subset \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{V}$ tel que $d(u,v) < r$. Alors $v \in \mathrm{U}$ et $d(x,v) < \varepsilon$ avec $v \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$. □

Exercice 9.5. Soit B une partie non majorée de $\mathbb{R}_+$.
Montrer que

$$\mathbb{R}_+ = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\mathrm{B}}.$$

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Si $a = 0$, c'est clair, puisque B est nécessairement non vide. On suppose donc $a > 0$.

L'ensemble

$$\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{B} \cap [na, (n+1)a] \neq \varnothing\}$$

est non vide et non majoré. On se donne $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathrm{A}$ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on es donne $b_n \in \mathrm{B}$ tel que

$$\varphi(n)a \leq b_n \leq (\varphi(n)+1)a.$$

On a

$$b_n \sim \varphi(n)a$$

ce qui traduit ici

$$\frac{b_n}{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a.$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{R}_+ = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\mathrm{B}}.}$$

□

Exercice 9.6. Montrer que $\mathrm{A} = \{\sqrt{n} + m^2,\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ est fermé.

Solution. Soit $x \in \overline{\mathrm{A}}$. On se donne une suite de $\mathrm{A}^{\mathbb{N}}$:

$$\sqrt{n_p} + m_p^2 \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} x.$$

On constate que (n_p) et (m_p) sont bornées. Quitte à extraire, on les suppose convergentes. Le résultat en découle. □

Exercice 9.7. Montrer que le sous-espace vectoriel des fonctions affines par morceaux n'est pas fermé mais dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Solution. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Le théorème de Heine fournit que f est uniformément continue. On se donne $\varepsilon > 0$ et η constante d'uniforme continuité associée à $\frac{\varepsilon}{2}$, ainsi qu'une suite de points

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$$

tels que $|x_{i+1} - x_i| < \eta$ pour $i = 0, ..., n-1$.

On se donne $\tilde{f}$ affine par morceaux telle que $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)$ pour tout i. Soit $x \in [x_i, x_{i+1}]$ pour un certain i.

$$\begin{aligned}|f(x) - \tilde{f}(x)| &= \left| f(x) - \tilde{f}(x_i) - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(f(x_{i+1}) - f(x_i)) \right| \\ &\leq |f(x) - \tilde{f}(x_i)| + \left| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Chapitre 10

Espaces vectoriel normés

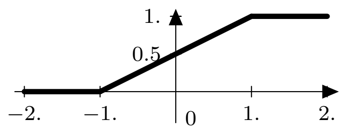
Exercice 10.1. Montrer qu'il existe une infinité non dénombrable de normes deux à deux non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$.

Solution. Si $a > 0$, l'application

$$N_a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}_+ \\ P & \mapsto & \sup\limits_{|t|\leq a} |P(t)| \end{cases}$$

est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. De plus, si $a < b$, alors $N_a < N_b$ donc $N_a \nsim N_b$. Ainsi il existe une infinité non dénombrable de normes sur $\mathbb{R}[X]$ deux à deux non équivalentes. $\square$

Remarque 10.1.1. Il est possible de construire deux normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}[X]$ telles qu'une suite (P_n) de polynôme donnée admette deux limites différentes : on considère $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \|.\|_\infty)$ affine par morceaux, de subdivision adaptée $(-2,-1,1,2)$ avec $f(2) = f(1) = -f(-1) = -f(-2) = 1$, et (P_n) suite de polynômes convergeant vers f pour $\|.\|$. On choisit $N_1 = \sup\limits_{[1,2]} |.|$ et $N_2 = \sup\limits_{[-2,-1]} |.|$. Les limites de (P_n) sont alors respectivement 1 et -1.



Exercice 10.2 (Théorème de Riesz)**.** Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que la boule unité fermée de (E, N) est compacte *si et seulement si* les compacts de (E, N) sont les fermés bornés.

Solution. Soit F un fermé borné de (E, N). Montrons que F est compact. Soit $R > 0$ tel que $F \subset B_f(0, R)$. L'application

$$h_R : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & Rx \end{cases}$$

est continue, donc $B_f(0, R)$ est compact. Soit $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ et φ extractrice telle que $y_{\varphi(n)} \to y \in B_f(0, R)$. Comme F est fermé, $y \in F$. Donc F est compact.

La réciproque est immédiate. $\square$

Exercice 10.3. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer

$$\mathrm{B}_f(0,1) \text{ compacte } \Longleftrightarrow \mathrm{E} \text{ est de dimension finie.}$$

Solution. On suppose que $\mathrm{B}_f(0,1)$ est compacte. Montrons d'abord :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \, \exists x_1, ..., x_n \in \mathrm{B}_f(0,1) \, / \mathrm{B}_f(0,1) \subset \bigcup_{i=i}^{n} \mathrm{B}_f\left(x_i, \frac{1}{2}\right) \tag{10.1}$$

On suppose par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \, \forall x_1, ..., x_n \in \mathrm{B}_f(0,1) \, / \mathrm{B}_f(0,1) \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_f\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$$

Posons $x_0 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $(x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ dans $\mathrm{B}_f(0,1)$ tels que

$$0 \leq p, q \leq n \text{ et } p \neq q \Rightarrow \mathrm{N}(x_p - x_q) > \frac{1}{2}.$$

On choisit $x_{n+1} \in \mathrm{B}_f(0,1) \setminus \bigcup_{i=i}^{n} \mathrm{B}_f\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$. On a bien

$$0 \leq p, q \leq n+1 \text{ et } p \neq q \Rightarrow \mathrm{N}(x_p - x_q) > \frac{1}{2}.$$

Cette suite d'éléments de $\mathrm{B}_f(0,1)$ ne peut donc avoir de valeur d'adhérence, ce qui est absurde puisque l'on a supposé $\mathrm{B}_f(0,1)$ compact. Ainsi on a montré la proposition 10.1.

Soit n vérifiant 10.1. Considérons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$. On a

$$\mathrm{B}_f(0,1) \subset \mathrm{F} + \mathrm{B}_f\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Étant donné que $\mathrm{B}_f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{B}_f(0,1)$, on montre par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \mathrm{B}_f(0,1) \subset \mathrm{F} + \mathrm{B}_f\left(0, \frac{1}{2^p}\right) \tag{10.2}$$

Soit $x \in \mathrm{B}_f(0,1)$. Si $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x = f_p + u_p$ où $f_p \in \mathrm{F}$ et $u_p \in \mathrm{B}_f\left(0, \frac{1}{2^p}\right)$. Ainsi en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $x \in \overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}$. Conclusion :

$$\mathrm{B}_f(0,1) \subset \mathrm{F}.$$

Par conséquent, $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et $\boxed{\text{E est de dimension finie}}$. □

Exercice 10.4 (Équivalence des normes en dimension finie)**.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ν une norme sur $\mathbb{K}^n$.
   Montrer que ν est équivalente à $\|.\|_\infty$.
   En déduire que toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer que toutes les normes sont équivalentes sur E.

Solution. **1.** Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ non nul.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

On vérifie aisément que si $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \nu(e_i)$ alors

$$\nu(x) \leq \mathrm{A}\|x\|_\infty.$$

Cela prouve notamment que ν est continue pour $\|.\|_\infty$. La sphère unité S pour $\|.\|_\infty$ est un fermé borné, donc est un compact de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$. On peut donc poser

$$\mu = \min \nu(\mathrm{S})$$

avec $\mu > 0$ et on vérifie alors que $\|x\|_\infty \leq \frac{1}{\mu}\nu(x)$, ce qui achève la démonstration.

2. Le cas $\mathrm{E} = \{0\}$ est trivial. Supposons que $\mathrm{E} \neq \{0\}$ et notons d sa dimension. Soient N et ν deux normes sur E, et Φ un isomorphisme d'espaces vectoriels de E dans $\mathbb{R}^d$. On vérifie facilement que $\tilde{\mathrm{N}} = \mathrm{N} \circ \Phi^{-1}$ et $\tilde{\nu} = \nu \circ \Phi^{-1}$ sont deux normes sur $\mathbb{K}^d$; elles sont donc équivalentes. Ainsi on dispose de A et B des réels positifs tels que $\tilde{\mathrm{N}} \leq \mathrm{A}\tilde{\nu}$ et $\tilde{\nu} \leq \mathrm{B}\tilde{\mathrm{N}}$. Cela fournit le résultat en composant à droite par Φ.

□

Remarque 10.4.1. Le corps doit être fixé, puisque un $\mathbb{C}$-ev de dimension d est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $2d$. Par ailleurs, si ν est une $\mathbb{C}$-norme, alors c'est une $\mathbb{R}$-norme.

Exercice 10.5. Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie, chacun muni d'une norme quelconque. Montrer que si f est un isomorphisme de E dans F, alors f est un homéomorphisme.

Solution. Soit N une norme sur E. Il suffit de prendre une norme ν bien choisie sur F :

$$\nu : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \mathrm{N}(f^{-1}(y)) \end{array} \right.$$

Étant une bijection isométrique de (E, N) dans (F, ν), f est un homéomorphisme. Les normes étant équivalentes, E et F sont homéomorphes. □

Exercice 10.6. Soient (E, ν) un espace vectoriel normé de dimension finie, et (F, ν) un espace vectoriel normé quelconque.
Montrer que si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, alors f est continue.

Solution. L'application

$$\|.\| : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \mathrm{N}(x) + \nu(f(x)) \end{array} \right.$$

est une norme sur E. On dispose donc de $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|x\| \leq \mathrm{AN}(x)$$

ce qui fournit

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \nu(f(x)) \leq \mathrm{AN}(x)$$

et donc f est continue. □

Exercice 10.7 (Un théorème de point fixe)**.** Montrer le résultat suivant.
Soient (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et F une partie fermée non vide de (E, N). Soit $\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ vérifiant

$$\exists\, \rho \in]0,1[\ \forall (x,y) \in \mathrm{F}^2 \quad \mathrm{N}(\varphi(x) - \varphi(y)) \leq \rho \mathrm{N}(x-y)$$

Alors :

(i) φ possède un et un seul point fixe $\omega \in \mathrm{F}$

(ii) Toute suite $u \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathrm{F} \text{ et } \forall\, n \geq 0,\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

converge vers ω.

Solution. Si l'on suppose que φ possède un point fixe, alors celui-ci est unique puisque φ est contractante.

Soit $u \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ définie comme dans l'énoncé. Par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \mathrm{N}(u_{n+1} - u_n) \leq \rho^n \mathrm{N}(u_1 - u_0)$$

Par conséquent, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente dans un espace vectoriel normé de dimension finie, donc est convergente. Ainsi (u_n) converge dans F puisque F est fermé. Étant donné que φ est lipschitzienne, elle est continue, et la limite de u est un point fixe de φ qui en admet donc bien un. □

Exercice 10.8.

$$l_1 = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty\}$$

Déterminer toutes les formes linéaires continues sur $(l_1, \|.\|_1)$.

Solution. Pour $p \in \mathbb{N}$, $\delta_p : u \in l_1 \mapsto u_p$ est dans $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(l_1, \mathbb{C})$, tout comme toute combinaison linéaire des $(\delta_p)_{p \in \mathbb{N}}$: dans ce cas, si $a_0, ..., a_p$ sont des complexes et

$$\varphi = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta_k$$

alors

$$|||\varphi||| = \max_{0 \leq k \leq p} |a_k|$$

(il suffit d'évaluer φ en les $(\delta_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ après avoir majoré la norme triple).

Considérons maintenant $l_\infty = \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,/\, a \text{ bornée}\}$. Pour $a \in l_\infty$, on définit

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} l_1 & \to & \mathbb{C} \\ u & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \end{array} \right.$$

qui est une forme linéaire continue sur l_1, car

$$\forall u \in l_1,\ |\varphi_a(u)| \leq \|a\|_\infty \|u\|_1$$

et donc

$$|||\varphi_a||| \leq \|a\|_\infty.$$

Toujours en évaluant φ_a en les $(\delta_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |a_k| \leq |||\varphi_a|||.$$

Par conséquent,

$$|||\varphi_a||| = \|a\|_\infty.$$

Soit $f : l_1 \to \mathbb{C}$ linéaire et continue pour $\|.\|_1$. Montrons qu'il existe $a \in l_\infty$ telle que $f = \varphi_a$. On pose $e_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|a_n| = |f(e_n)| \leq |||f|||\|e_n\|_1 = |||f|||$$

Donc $a \in l_\infty$. Montrons pour terminer que $f = \varphi_a$. Soit $u \in l_1$.

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \|\cdot\|_1}} \sum_{k=0}^{n} u_k e_k\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\sum_{k=0}^{n} u_k e_k\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k f(e_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k a_k = \varphi_a(u) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f = \varphi_a}$ et

$$\mathcal{J} : \begin{cases} (l_\infty, \|.\|_\infty) & \to & \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(l_1, \mathbb{C}) \\ a & \mapsto & \varphi_a \end{cases}$$

est bien définie, surjective d'après ce qui précède, linéaire, conserve la norme donc est injective et continue. □

Exercice 10.9. On munit $\mathbb{R}^n$ de son unique topologie d'espace normé. Montrer qu'une partie B de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité fermée d'une norme de $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si* B est convexe, compacte, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide.

Solution. Le sens direct étant évident, montrons le sens réciproque. Soit B une partie convexe, compacte, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, posons

$$\mathrm{I}_x = \left\{\lambda > 0,\ \frac{x}{\lambda} \in \mathrm{B}\right\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide : il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{B}$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{B}(\mathrm{A}, r) \subset \mathrm{B}$; par symétrique de B $\mathrm{B}(-\mathrm{A}, r) \subset \mathrm{B}$; par convexité, $\mathrm{B}(0, r) \subset \mathrm{B}$. Ainsi l'origine est dans B et tous les réels suffisamment grands sont dans I_x, et si $\lambda \in \mathrm{I}_x$, alors $[\lambda, +\infty[\in \mathrm{I}_x$. Ainsi I_x est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. B étant compacte, B est bornée par $\mathrm{M} > 0$. Si $\lambda \in \mathrm{I}_x$ alors $\lambda \geq \frac{\|x\|}{\mathrm{M}} > 0$ et donc on peut poser $\mathrm{N}(x) = \inf \mathrm{I}_x$. Comme B est fermée, I_x aussi et $\mathrm{I}_x = [\mathrm{N}(x), +\infty[$. On prolonge N en 0 par $\mathrm{N}(0) = 0$.

N est positive. Si $\mu > 0$, alors on constate que $\mathrm{I}_{\mu x} = [\mu\mathrm{N}(x), +\infty[$ et comme B est symétrique, $\mathrm{I}_x = \mathrm{I}_{-x}$ ce qui donne $\mathrm{N}(x) = \mathrm{N}(-x)$, donc N est homogène. Enfin, comme B est convexe et que $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{N}(x) \leq 1\}$, N vérifie l'inégalité triangulaire. En effet, si $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors $\frac{x}{\mathrm{N}(x)}$ et $\frac{y}{\mathrm{N}(y)}$ sont dans B et donc $\frac{x+y}{\mathrm{N}(x)+\mathrm{N}(y)}$ aussi, ce qui fournit le résultat. □

Exercice 10.10. Un espace normé est appelé espace de Banach *si et seulement si* il est complet. Montrer qu'un espace normé est un espace de Banach *si et seulement si* toute série absolument convergente est convergente.

Solution. Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un espace normé.

Supposons que $(\mathrm{E}, \|.\|)$ est de Banach. Soit $\sum u_n$ une série à terme général dans E qui converge absolument. On note (S_n) la suite des sommes partielles. Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geq p \geq \mathrm{N}$,

$$\sum_{i=p}^{q} \|u_i\| < \varepsilon$$

donc

$$\|\mathrm{S}_q - \mathrm{S}_p\| = \|\sum_{i=p}^{q} u_i\| \leq \sum_{i=p}^{q} \|u_i\| < \varepsilon$$

et (S_n) est de Cauchy donc converge. Ainsi la série $\sum u_n$ converge.

Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente de $(\mathrm{E}, \|.\|)$ converge. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $(\mathrm{E}, \|.\|)$ dont on va extraire une sous-suite convergente. On note $\varphi(1)$ le plus petit entier tel que

$$p, q \geq \varphi(1) \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq 1.$$

On construit par récurrence $\varphi(1), ..., \varphi(k), ...$ tels que si $k \geq 2$, $\varphi(k)$ est le plus petit entier supérieur strict à $\varphi(k-1)$ vérifiant

$$p, q \geq \varphi(k) \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, la série $\sum(u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)})$ converge absolument donc converge, et donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Ainsi u possède une valeur d'adhérence. Étant de Cauchy, elle converge. Donc $(\mathrm{E}, \|.\|)$ est de Banach.

$\square$

Exercice 10.11 (Autour des racines de polynômes)**.** Soit N un entier.

1. Montrer que
$$\mathbb{U}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P} \text{ unitaire } \}$$
est un fermé de $\mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]$.

2. Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{U}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]$ et z une racine de P. Montrer
$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{d-1} |a_i|\right).$$

3. Si $d \in \mathbb{N}^*$ et Q est un polynôme unitaire de degré d dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ limite d'une suite (P_n) de polynômes unitaires de degré d, si Z est une racine de Q, montrer qu'il existe z_n racine de P_n telle que $z_n \to \mathrm{Z}$.

4. Montrer que
$$\mathbb{S}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] = \{\mathrm{P} \in \mathbb{U}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P} \text{ scindé sur } \mathbb{R}\}$$
est un fermé de $\mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]$.

5. **a)** Montrer que
$$\Omega_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] \setminus \{0\} \mid \mathrm{P} \text{ scindé à racines simples dans } \mathbb{R}\}$$
est un ouvert de $\mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]$.

b) En déduire que l'application
$$\omega_i : \left\{ \begin{array}{ccl} \Omega_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \mapsto & \text{la } i^{\text{ème}} \text{ racine de P par ordre croissant} \end{array} \right.$$
est continue.

6. Montrer que
$$\overline{\Omega_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] \setminus \{0\} \mid \mathrm{P} \text{ scindé dans } \mathbb{R}\} \cup \{0\}.$$

7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\mathrm{V} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{U}_{\mathrm{N}}^{\mathbb{C}}[\mathrm{X}] \text{ à racine dans } \Omega\}$$
est un ouvert de $\mathbb{C}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]$.

Solution. **1.** L'application
$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k \mathrm{X}^k & \mapsto & a_{\mathrm{N}} \end{array} \right.$$
est linéaire, sur un espace vectoriel de dimension finie, donc est continue.
$\mathbb{U}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] = \Phi^{-1}(\{1\})$ donc $\boxed{\mathbb{U}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}] \text{ est fermé}}$.

2. Si $|z| \leq 1$, c'est évident. Supposons $|z| > 1$. Alors
$$|z| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{\mathrm{N}-1-k}}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{\mathrm{N}-1-k}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|.$$

3. Quitte à effectuer des transformation affines, on suppose que $\mathrm{Z} = 0$. Soient $z_{n1}, ..., z_{nd}$ les racines de P_n. Le produit des racines de P_n vaut coefficient constant de P_n qui tend lui-même vers 0 puisque $\mathrm{Q}(0) = 0$. Donc il existe une racine de P_n qui tend vers 0.

4. Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{S}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}_n \to \mathrm{Q}$. Montrons que $\mathrm{Q} \in \mathbb{S}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$.

Comme $\mathbb{U}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ est fermé, Q est unitaire. On note

$$\mathrm{P}_n = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X} - \omega_{n,k}) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_{n,k}\mathrm{X}^k$$
$$\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} b_k \mathrm{X}^k$$

Soit $0 \le k \le \mathrm{N}$. Étant donné que l'application

$$\Phi_k : \begin{cases} \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\mathrm{N}} a_j \mathrm{X}^k & \mapsto & a_k \end{cases}$$

est linéaire sur un espace de dimension finie donc continue, $a_{n,k} \to b_k$. Notamment $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{A}_k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\, |a_{n,k}| \le \mathrm{A}_k.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in [\![0, \mathrm{N}]\!] \quad |\omega_{n,k}| \le \max\left(1, \sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{A}_j\right)$$

et donc $(\omega_n)_{n\ge 0} = ((\omega_{n,1}, ..., \omega_{n,\mathrm{N}}))_{n\ge 0}$ est bornée dans $(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \|.\|_\infty)$ par $\mathrm{R} \ge 0$.

Soit $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice telle que $\omega_{j(n)}$ converge vers $u = (u_1, ..., u_\mathrm{N}) \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. Par conséquent,

$$\forall k \in [\![0, \mathrm{N}]\!] \quad \omega_{j(n),k} \to u_k.$$

La continuité du produit permet de conclure :

$$\mathrm{Q} = \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X} - \omega_{j(n),k})\right) = \prod_{k=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X} - \lim_{n\to+\infty} \omega_{j(n),k}) = \prod_{k=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X} - u_k).$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{S}_\mathrm{N}[\mathrm{X}] \text{ est fermé}}$.

5. **a)** Soit $\mathrm{P} \in \Omega_\mathrm{N}$. Soient a et $\omega_1 < ... < \omega_\mathrm{N}$ des réels tels que

$$\mathrm{P} = a \prod_{j=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X} - \omega_j).$$

Soit $(t_0, ..., t_\mathrm{N}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}+1}$ tels que

$$t_0 < \omega_1 < t_1 < ... < \omega_\mathrm{N} < t_\mathrm{N}.$$

Comme P est scindé à racines simples,

$$\forall i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]\; \mathrm{P}(t_{i-1})\mathrm{P}(t_i) < 0.$$

Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathrm{U} = \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}] \,/\, \forall i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]\; \mathrm{Q}(t_{i-1})\mathrm{Q}(t_i) < 0\}.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure que $\mathrm{U} \subset \Omega_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$. Par ailleurs, $\mathrm{P} \in \mathrm{U}$. L'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R}^\mathrm{N} \\ \mathrm{Q} & \mapsto & (\mathrm{Q}(t_{i-1})\mathrm{Q}(t_i))_{1\leq i\leq \mathrm{N}} \end{array} \right.$$

est polynomiale donc continue. On en déduit que U est un ouvert contenant P, donc $\Omega_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ est un ouvert de $\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{P} \in \Omega[\mathrm{X}]$. Quitte à diminuer ε, on suppose que $2\varepsilon < \min\limits_{2\leq i\leq \mathrm{N}}(\omega_i(\mathrm{P}) - \omega_{i-1}(\mathrm{P}))$. On adapte la preuve précédente avec

$$\mathrm{W} = \{\mathrm{Q} \in \Omega_\mathrm{N}[\mathrm{X}] \,/\forall i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]\; \mathrm{Q}(\omega_i(\mathrm{P}) - \varepsilon)\mathrm{Q}(\omega_i(\mathrm{P}) + \varepsilon) < 0\}$$

qui est ouvert et contient P. Ainsi

$$\forall \mathrm{P} \in \Omega_\mathrm{N}\; \forall \varepsilon > 0\; \exists\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(\mathrm{P}) \text{ ouvert } \,/\, \mathrm{Q} \in \mathrm{V} \Rightarrow |\omega_i(\mathrm{P}) - \omega_i(\mathrm{Q})| < \varepsilon$$

ce qui traduit que ω_i est continue.

6. [1] Soit (P_k) une suite d'éléments de $\Omega_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ qui converge vers $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Notons

$$\mathrm{P}_k = c_k \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{X} - \alpha_{k,i})$$

où les $\alpha_{k,i}$ sont les N racines distinctes de P_k. Soit $1 \leq i \leq \mathrm{N}$ fixé et considérons la suite $(\alpha_{i,k})_{k\in\mathbb{N}})$. Deux possibilités : soit cette suite possède une sous-suite bornée de laquelle on peut extraire une sous-suite convergente, soit elle n'en possède pas et alors on peut extraire une sous-suite divergeant vers $\pm\infty$. En réalisant des extractions successives et quitte à réordonner, on dispose de φ extractrice et de $p \in [\![0,\mathrm{N}]\!]$ tels que $(\alpha_{\varphi(k),1}), \ldots, (\alpha_{\varphi(k),p})$ convergent vers $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et les $\mathrm{N} - p$ autres suites divergent vers $\pm\infty$.

À partir d'un certain rang,

$$\mathrm{P}_{\varphi(k)} = d_k \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_{\varphi(k),i}) \prod_{i=p+1}^{\mathrm{N}} \left(1 - \frac{\mathrm{X}}{\alpha_{\varphi(k),i}}\right)$$

où $(d_k) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ que l'on peut supposer convergeant vers $d \in \mathbb{R}$ ou divergeant vers $\pm\infty$ quitte à extraire à nouveau. Lorsque k tend vers $+\infty$,$\displaystyle\prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_{\varphi(k),i}) \prod_{i=p+1}^{\mathrm{N}} \left(1 - \frac{\mathrm{X}}{\alpha_{\varphi(k),i}}\right)$ converge vers $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_{\varphi(k),i})$. Si (d_k) diverge vers $\pm\infty$, (P_k/d_k) a une limite nulle, ce qui est absurde. Donc (d_k) converge vers d et $(\mathrm{P}_{\varphi(k)})$ converge vers

$$\mathrm{P} = d \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_{\varphi(k),i})$$

1. D'après S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Analyse 3*, réédition de 2014 chez Cassini, page 28.

qui est scindé dans $\mathbb{R}$.

Soit P polynôme scindé dans $\mathbb{R}$ de degré p non nul (le cas $\mathrm{P} = 0$ est évident). On vérifie que si on écrit

$$\mathrm{P} = c\prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X} - \alpha_i)$$

où $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_p$ sont les racines et de P et $c \in \mathbb{R}^*$, P est limite de la suite définie pour $k \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathrm{P}_k = c\prod_{j=1}^{n-p}\left(1 - \frac{\mathrm{X}}{k\beta_j}\right)\prod_{i=1}^{p}\left(\mathrm{X} - \alpha_i - \frac{i}{k}\right)$$

où $\beta_1, ..., \beta_{n-p}$ sont des réels distincts non nuls. Pour k assez grand, $\mathrm{P}_k \in \Omega_n[\mathrm{X}]$.

7. On suppose par l'absurde que $\mathrm{V} \setminus \overset{\circ}{\mathrm{V}} \neq \varnothing$.

Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{V}\setminus\overset{\circ}{\mathrm{V}}$ et $(\mathrm{Q}_n) \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]\setminus\mathrm{V}^{\mathbb{N}}$ tels que $\mathrm{Q}_n \underset{n\to=\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}$. La forme linéaire qui à un polynôme associe sont $(\mathrm{N}+1)^{\text{ème}}$ coefficient est continue. On suppose alors que $(\mathrm{Q}_n) \in \mathbb{U}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}}$. On note

$$\mathrm{Q}_n = q_n\prod_{i=1}^{\mathrm{N}}(\mathrm{X} - z_{n,k})$$

Une de ses racines n'est pas dans Ω, $z_{n,1}$ par exemple. On est en dimension finie, donc par équivalence des normes, Q_n tend coefficients par coefficients vers P et d'après le lemme de localisation des racines, chacune de ses racines est majorée en module par 1 ou la somme de ses coefficients divisée par le module $> r > 0$ à partir d'un certain rang de son coefficient dominant, elle-même majorée indépendamment de n puisque (Q_n) converge... Bref, on peut extraire des suites de racines des sous-suites convergentes à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$ mais qui convergent vers des complexes de Ω qui est ouvert. C'est absurde. Conclusion : V est ouvert.

□

Exercice 10.12. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe une norme pour laquelle $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Q.

Solution. Posons

$$\mathrm{P}_n = 2^n(\mathrm{X}^n - \mathrm{Q})$$

Il suffit donc de construire une norme $\|.\|$ pour laquelle $\|\mathrm{P}_n\| = 1$. La suite est échelonnée en degré à partir du rang $\deg \mathrm{Q} + 1$. Pour $0 \leq n \leq \deg \mathrm{Q}$ on la modifie en X^n. Alors (P_n) est une base de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Si $\mathrm{T} = \lambda_1 + ... + \lambda_k\mathrm{P}_k$ on pose

$$\|\mathrm{T}\| = \max_{1\leq i\leq k}|\lambda_i|$$

qui est bien une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ telle que $\|\mathrm{P}_n\| = 1$ pour tout n et

$$\|\mathrm{X}^n - \mathrm{Q}\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Exercice 10.13. Soient $d \in \mathbb{N}$ et (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$. Montrer

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_n) \text{ converge dans } \mathbb{R}_d[\mathrm{X}] &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{P}_n(x)) \text{ converge} \\ &\iff \exists\, x_0, ..., x_d \in \mathbb{R} \text{ distincts, } (\mathrm{P}_n(x_i)) \text{ converge}\end{aligned}$$

Exercice 10.14. Si $d \in \mathbb{N}$, montrer que l'ensemble des polynômes de degré d fixé est un ouvert de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Solution. En effet,

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \mapsto & \frac{\mathrm{P}^{(d)}(0)}{d!} \end{cases}$$

est continue car polynômiale en les coefficients des polynômes, et l'ensemble des polynômes de degré d fixé est $\Phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$. $\square$

Chapitre 11

Convexité

Exercice 11.1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Montrer que toute intersection de convexes de E est convexe.

Solution. Soit $\mathcal{C}$ une famille de convexes. Il est franchement évident que $\bigcap\limits_{\mathrm{C}\in\mathcal{C}} \mathrm{C}$ est convexe. □

Exercice 11.2. Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Montrer que si A est convexe, alors

1. $\bar{\mathrm{A}}$ est convexe ;
2. $\mathring{\mathrm{A}}$ est convexe ;
3. si $\mathring{\mathrm{A}} \neq \varnothing$, $\mathrm{A} \subset \overline{\mathring{\mathrm{A}}}$. En déduire $\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathring{\mathrm{A}}}$.

Solution.

1. Soient x et y dans $\overline{\mathrm{A}}$. On se donne (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de A convergeant respectivement vers x et y. Par continuité des opérations, il est clair que si $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)x_n + \lambda y_n$ tend vers $(1-\lambda)x + \lambda y$, qui est donc bien dans $\overline{\mathrm{A}}$.
2. Soient x et y dans $\mathring{\mathrm{A}}$. Soit r tel que $\mathrm{B}(a,r)$ et $\mathrm{B}(b,r)$ soient dans A. Soit $\lambda \in [0,1]$. Du fait de la convexité de A, $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ est dans A. Reste à prouver que A contient $\mathrm{B}(z,r)$, ce qui prouvera $z \in overset\circ\mathrm{A}$. On se donne donc $a \in \mathrm{B}(z,r)$. Il se trouve qu'un dessin aide bien et permet de voir que $\alpha = x + (a-z)$ est dans $\mathrm{B}(x,r)$ et que $\beta = y + (a-z)$ est dans $\mathrm{B}(y,r)$. On a $a = (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta$ qui est donc bien dans A par convexité.
3. Soit $a \in \mathrm{A}$ et $b \in overset\circ\mathrm{A}$. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(b,r) \subset \mathrm{A}$. On regarde le cône de sommet a formé par cette boule et on construit une suite de $overset\circ\mathrm{A}$ qui converge vers a.

□

Exercice 11.3. Soit (E,N) un e.v.n de dimension finie et C un convexe de E.
Montrer que si C est dense dans E alors $\mathrm{C} = \mathrm{E}$.
Proposer un contre-exemple en dimension infinie.

Solution. On raisonne par récurrence sur la dimension de E, notée d.

Si $d = 1$, c'est évident. Soit $d \geq 1$ tel que pour tout e.v.n de dimension finie égale à d, toute partie convexe et dense de cet espace est l'espace tout entier. Soit (E,N) un e.v.n de dimension $d+1$ et C une partie convexe dense de E.

Soit H un hyperplan de E et $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$ unitaire. $\mathrm{C} \cap \mathrm{H}$ est une intersection de deux convexes ; c'est un convexe de H. Montrons que $\mathrm{C} \cap \mathrm{H}$ est dense dans H. Soit $r > 0$. Par densité de C dans E,

$$\mathrm{B}(h + ra, r) \cap \mathrm{C} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(h - ra, r) \cap \mathrm{C} \neq \varnothing.$$

On se donne $b \in \mathrm{B}(h + ra, r) \cap \mathrm{C} \neq \varnothing$ et $c \in \mathrm{B}(h - ra, r) \cap \mathrm{C} \neq \varnothing$. On a

$$[b, c] \subset \mathrm{B}(h, 2r) \quad \text{et} \quad [b, c] \cap \mathrm{H} \neq \varnothing.$$

En effet,

$$f : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h + ta & \longmapsto & t \end{cases}$$

est continue (projection) et

$$b \in f^{-1}(]0, +\infty[) \quad \text{et} \quad c \in f^{-1}(] - \infty, 0[)$$

or le théorème des valeurs intermédiaires impose que f s'annule sur $[b, c]$. Soit $d \in [b, c]$ tel que $f(d) = 0$. Alors $d \in \mathrm{H}$.

On a donc montré

$$\forall\, r > 0, \quad \mathrm{C} \cap \mathrm{B}(h, r) \neq \varnothing$$

ce qui traduit $\mathrm{C} \cap \mathrm{H}$ dense dans H. En appliquant l'hypothèse de récurrence à H, on obtient $\mathrm{C} \cap \mathrm{H} = \mathrm{H}$.

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{H}$.

$$x = \underbrace{h}_{\in \mathrm{H}} + \underbrace{t}_{\in \mathbb{R}} a$$

or

$$[x + a, x] \cap \mathrm{C} \neq \varnothing$$

il existe $c \in \mathrm{C}$ tel que

$$x \in [h, c] \subset \mathrm{C}$$

donc $x \in \mathrm{C}$ et finalement $\mathrm{C} = \mathrm{E}$. La récurrence se propage. □

Exercice 11.4. Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que tout convexe fermé non vide et différent de E est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Chapitre 12

Continuité

Exercice 12.1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \ \exists t \in]0, 1[\ f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

1. Montrer que f est convexe.

2. Qu'en est-il si l'on omet l'hypothèse de continuité ?

Solution. **1.** Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas convexe. On dispose donc de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de $t_0 \in [0, 1]$ tels que

$$f((1-t_0)x_0 + ty_0) > (1-t_0)f(x_0) + t_0 f(y_0).$$

On a par conséquent $x_0 \neq y_0$ et $t_0 \in]0, 1[$. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affine telle que $a(x_0) = f(x_0)$ et $a(y_0) = f(y_0)$. Considérons $g = f - a$. g vérifie aussi les conditions de l'énoncé, et

$$g((1-t_0)x_0 + t_0 y_0) > (1-t_0)g(x_0) + t_0 g(y_0) = 0.$$

On pose $c = (1-t_0)x_0 + t_0 y_0$. L'idée est de restreindre l'étude de g à un segment sur lequel elle est strictement positive sauf en les bornes, où elle est nulle, ce qui fournira une contradiction avec l'hypothèse de départ.

L'ensemble

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq c \text{ et } g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0\} \cap] - \infty, c]$$

est un fermé non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure que l'on note a. Ainsi $a < c$, $g(a) = 0$ et $\forall x \in]a, c[,\ g(x) > 0$ par continuité de g. De la même façon on construit $b > c$ tel que $g(b) = 0$ et $\forall x \in]c, b[,\ g(x) > 0$.

Or par hypothèse il existe $t \in]0, 1[$ tel que $g((1-t)a + tb) \leq (1-t)g(a) + tg(b) = 0$. C'est absurde. Conclusion : f est convexe.

2. L'indicatrice de $\mathbb{Q}$ vérifie la propriété mais n'est pas convexe puisque non continue.

□

Exercice 12.2. Montrer qu'un morphisme de groupes additifs entre deux $\mathbb{R}$-ev est $\mathbb{Q}$-linéaire.

Exercice 12.3. On munit $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\| \|_\infty$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

est continue.

Solution. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On utilise le critère séquentielle de continuité. Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f$ au sens de $\| \|_\infty$, c'est-à-dire que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $|x-y| < \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

Soit maintenant $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq \mathrm{N},\ \|f_n - f\|_\infty \leq \eta$.

Soit $x \in [0,1]$. On a alors : $\forall n \geq \mathrm{N},\ |\varphi \circ f_n(x) - \varphi \circ f(x)| < \varepsilon$. Par passage au sup, on obtient que $\|\varphi \circ f_n - \varphi \circ f\|_\infty < \varepsilon$. Conclusion : Φ est continue. □

Exercice 12.4 (Théorème d'homéomorphisme)**.** Soient I et J intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$. On suppose f bijective et continue. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 12.5. Soit $f : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R},+)$ un morphisme de groupes additifs. Établir l'équivalence des trois conditions suivantes :

(i) $\exists\, a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$;

(ii) f est continue ;

(iii) il existe un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ dont l'image est bornée.

Exercice 12.6. Déterminer les injections continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(2x - f(x)) = x$$

Solution. Remarquons tout d'abord que f est surjective. Elle est donc bijective et

$$f^{-1} = 2id - f$$

De là, en composant à droite par f,

$$f^2 + id = 2f$$

Toute suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et $u_0 \in \mathbb{R}$ s'écrit (*cf* l'équation caractéristique associée) :

$$u_n = \alpha + n\beta$$

De là,

$$f(x) = x + \beta \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

et finalement l'ensemble de fonctions cherché est

$$\boxed{\{x \mapsto x + a \mid a \in \mathbb{R}\}}$$

□

Exercice 12.7. Que dire de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

Solution.

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{Q}) \subset \underbrace{\mathbb{Q}\cup f(\mathbb{Q})}_{\text{dénombrable}}$$

Si f n'est pas constante, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle non dénombrable : impossible ! Donc $\boxed{f \text{ est constante.}}$

□

Exercice 12.8 (Théorème de prolongement de Tietze)**.** Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et A un fermé de E. Toute application continue et bornée de A dans $\mathbb{R}$ peut se prolonger en une application continue et bornée de E dans $\mathbb{R}$, ayant les mêmes bornes inférieure et supérieure.

Solution. Soit $f : (\mathrm{E}, \|.\|) \to \mathrm{A}$ continue et bornée. On peut se ramener par des transformations affines à $\sup f = 2$ et $\inf f = 1$. On considère l'application g coïncidant avec f sur A et définie pour tout $x \in \mathrm{E}\setminus\mathrm{A}$ par

$$g(x) = \frac{1}{d(x,\mathrm{A})}\inf_{a\in\mathrm{A}} f(a)\|x-a\|$$

Soit $x \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{E}\setminus\mathrm{A}$. $0 < d(x,\mathrm{A}) \le \|x-a\|$ et donc

$$\frac{f(a)\|x-a\|}{d(x,\mathrm{A})} \ge \frac{f(a)\|x-a\|}{\|x-a\|} = f(a) \ge 1.$$

De plus comme $f(a) \le 2$, en passant à l'inf

$$g(x) \le 2\inf\frac{\|x-a\|}{d(x,\mathrm{A})} = 2.$$

Ainsi g a les mêmes bornes que f.

Montrons que g est continue. Soient $x, y \in \mathrm{E}\setminus\mathrm{A}$ et $a \in \mathrm{A}$.

$$f(a)\|x-a\| \le f(a)\|x-y\| + f(a)\|y-a\| \le 2\|x-y\| + f(a)\|y-a\|$$

Par passage à l'inf et par symétrie des rôles de x et y, on en déduit que

$$x \in \mathrm{E}\setminus\mathrm{A} \mapsto \inf_{a\in\mathrm{A}} f(a)\|x-a\|$$

est 2-lipschitzienne. La distance à A est 1-lipschitzienne et les opérations sont continues. Ainsi g est continue sur $\mathrm{E}\setminus\mathrm{A}$. De même, g est continue sur $\mathring{\mathrm{A}}$. Il reste à montrer que g est continue en $x_0 \in \partial\mathrm{A}$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{B}_o(x_0,\eta)\cap\mathrm{A} \quad |g(x)-g(x_0)| < \varepsilon. \tag{12.1}$$

Soit $x \in \mathrm{B}_o\left(x_0, \frac{\eta}{3}\right) \cap (\mathrm{E}\setminus\mathrm{A})$. Ainsi

$$d(x,\mathrm{A}) \le \|x_0 - x\| \le \frac{\eta}{3}$$

et si $a \in \mathrm{A}\setminus\mathrm{B}_o(x_0,\eta)$ alors

$$\|x-a\| \ge \frac{2\eta}{3}$$

et donc

$$f(a)\frac{\|x-a\|}{d(x,\mathrm{A})} \ge 2f(a) \ge 2 \ge f(x)$$

d'où on conclut

$$\|x_0 - x\| < \frac{\eta}{3} \Rightarrow g(x) = \inf_{a \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_o(x_o, \eta)} \frac{f(a)\|x-a\|}{d(x, \mathrm{A})}$$

Soit $a \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}_o(x_o, \eta)$ et $x \in (\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}) \cap \mathrm{B}_o\left(x_0, \frac{\eta}{3}\right)$.

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(a) \leq f(x_0) + \eta$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)\frac{\|x-a\|}{d(x, \mathrm{A})} \leq f(a)\frac{\|x-a\|}{d(x, \mathrm{A})} \leq (f(x_0) + \varepsilon)\frac{\|x-a\|}{d(x, \mathrm{A})}$$

et par passage à l'inf à gauche et à droite,

$$g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

□

Exercice 12.9. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sup\limits_{\|x\| \leq r} \|f(x)\| \end{array} \right.$$

est continue.

<u>*Solution*</u>. Soit $r_0 \leq 0$. F est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc admet une limite à gauche et à droite en r_0 et on a

$$\lim_{r_0^-} \mathrm{F} \leq \mathrm{F}(r_0) \leq \lim_{r_0^+} \mathrm{F}$$

Montrons que F est continue à gauche en r_0. $\mathrm{B}_f(0, r_0)$ est compact donc on dispose de $x_0 \in \mathrm{B}_f(0, r_0)$ tel que $\|f(x_o)\| = \mathrm{F}(r_0)$.

— Si $\|x_0\| < r_0$ alors F est constante sur $[\|x_0\|, r_0]$ et la continuité à gauche est évidente ;

— Si $\|x_0\| = r_0$ alors si $\varepsilon > 0$ par continuité de f on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\|x - x_0\| < \eta \Rightarrow \|f(x)\| \geq \mathrm{F}(r) - \varepsilon$$

et donc

$$r_0 - \eta \leq r \leq r_0 \Rightarrow \mathrm{F}(r) \geq \mathrm{F}(r_0) - \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité à gauche.

Montrons que F est continue à droite en r_0. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ on dispose de $x_p \in \mathrm{B}_f\left(0, r_0 + \frac{1}{p}\right)$ tel que $\|f(x_p)\| = \mathrm{F}\left(r_0 + \frac{1}{p}\right)$. On extrait à l'aide de φ une sous-suite de (x_p) convergeant vers y. Par continuité de la norme, $\|y\| \leq r_0$ et par continuité de f, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(y)$. Par conséquent

$$\mathrm{F}(r_0) \geq \|f(y)\| = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{F}\left(r_0 + \frac{1}{p}\right) = \lim_{r_0^+} \mathrm{F} \geq \mathrm{F}(r_0)$$

ce qui fournit la continuité à droite de F en r_0. □

Chapitre 13

Compacité

Exercice 13.1. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $u \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ une suite dont on note $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence. Montrer que

$$\Lambda(u) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p,\, p \geq n\}}. \tag{13.1}$$

Dans le cas d'un espace vectoriel normé de dimension fini et d'une suite bornée, en déduire que $\Lambda(u)$ est compact.

Solution. Voici une démonstration possible en raisonnant par équivalence.
Soit $\lambda \in \mathrm{E}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \Lambda(u) &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq \mathrm{N} \quad d(u_n, \lambda) < \varepsilon \\
&\iff \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \geq \mathrm{N} \quad d(u_n, \lambda) < \varepsilon \\
&\iff \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall \mathrm{V} \in \mathcal{V}(\lambda) \quad \{u_p, \mid p \geq \mathrm{N}\} \cap \mathrm{V} \neq \varnothing \\
&\iff \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \lambda \in \overline{\{u_p \mid p \geq \mathrm{N}\}} \\
&\iff \lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p \mid p \geq n\}}
\end{aligned}$$

□

Exercice 13.2 (Borel-Lebesgue)**.** Soit (X, d) un espace métrique.
On appelle recouvrement ouvert de (X, d) toute famille $(\Omega_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'ouverts de X telle que $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \Omega_i = \mathrm{X}$.
On dit que (X, d) vérifie la propriété de Borel-Lebesgue *si et seulement si* de tout recouvrement ouvert de (X, d) on peut extraire un sous-recouvrement fini.
Montrer qu'un espace métrique est compact *si et seulement si* il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Solution. Condition nécessaire. Supposons (X, d) compact. Soit $r > 0$. On suppose par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x_1, ..., x_n \in \mathrm{K} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_o(x_i, r) \subsetneq \mathrm{X}$$

On dispose donc de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}_o(x_i, r) \subsetneq \mathrm{X} \quad \text{ et } \quad x_{p+1} \notin \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}_o(x_i, r)$$

On peut extraire de (x_p) une sous-suite convergente, comme K est compact. Or c'est contradictoire avec le fait que : $p \neq q \Rightarrow d(x_p, x_q) \geq r$. Ainsi :

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^* \quad \exists\, x_1, ..., x_n \in \mathrm{K} \quad \mathrm{K} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_o(x_i, r) \tag{13.2}$$

Soit $(\Omega_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert de (X, d).

$$\exists\, r > 0 \quad \forall x \in \mathrm{X} \quad \exists i \in \mathrm{I} \quad \mathrm{B}_o(x, r) \subset \Omega \tag{13.3}$$

En effet, si l'on suppose par l'absurde cette proposition fausse, on dispose pour $n \in \mathbb{N}$ de $x_n \in \mathrm{X}$ tel que

$$\forall i \in \mathrm{I} \quad \mathrm{B}_o(x_n, 2^{-n}) \not\subset \Omega_i$$

et on peut supposer quitte à extraire que la suite (x_n) converge vers $\omega \in \mathrm{X}$. Soit $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que $\omega \in \Omega_{i_0}$ et $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathrm{B}_o(\omega, \mathrm{R}) \subset \Omega_{i_0}$. Pour n assez grand,

$$x_n \in \mathrm{B}_o(\omega, 2^{-n}) \subset \Omega_{i_0}$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_p$ vérifiant (13.2) et $r > 0$ vérifiant (13.3). Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on dispose de $j_i \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{B}(x_i, r) \subset \Omega_{j_i}$. Ainsi

$$\mathrm{X} = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_{j_i}.$$

Condition suffisante. Supposons maintenant que (X, d), espace métrique quelconque, vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. Soit $u \in \mathrm{X}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$\mathrm{V}_n = \{u_{n+p},\ p \in \mathbb{N}\} \text{ et } \Omega_n = \mathrm{X} \setminus \mathrm{V}_n$$

et l'ensemble des valeurs d'adhérence de u

$$\Lambda(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{V}_n}.$$

On suppose par l'absurde que $\Lambda(u) = \varnothing$. Alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{X} \setminus \overline{\mathrm{V}_n}) = \mathrm{X} \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{V}_n} = \mathrm{X}$$

et donc il existe $\mathrm{N}_1 \leq ... \leq \mathrm{N}_p$ tels que

$$\mathrm{X} = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_{\mathrm{N}_i}$$

or $\Omega_{\mathrm{N}_1} \subset ... \subset \Omega_{\mathrm{N}_p}$ donc $\mathrm{V}_{\mathrm{N}_p} = \varnothing$ ce qui est absurde. □

Exercice 13.3. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soient K et L deux compacts de E. Montrer que

$$\mathrm{S}(\mathrm{K}, \mathrm{L}) = \bigcup_{(a,b)\in \mathrm{K}\times\mathrm{L}} [a, b]$$

est compact.

Solution. On a par définition

$$\mathrm{S}(\mathrm{K}, \mathrm{L}) = \{(1-t)a + tb,\ t \in [0, 1],\ a \in \mathrm{K},\ b \in \mathrm{L}\}$$

ce qui signifie que $\mathrm{S}(\mathrm{K}, \mathrm{L})$ est l'image du compact $[0, 1] \times \mathrm{K} \times \mathrm{L}$ par l'application continue $\Phi : (t, a, b) \mapsto (1-t)a + tb$. Ainsi $\mathrm{S}(\mathrm{K}, \mathrm{L})$ est compact. □

Exercice 13.4. Soit (E, ν) un espace normé, K une partie compacte de E et $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{K}$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites affines passant par a et rencontrant K.
Montrer que $\bigcup_{\mathrm{D}\in\mathcal{D}} \mathrm{D}$ est un fermé de E. La conclusion subsiste-t-elle si l'on remplace «K compacte» par «K fermée» ?

Solution.

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\mathrm{D}\in\mathcal{D}} \mathrm{D} = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} \{\lambda(k-a) + a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Soit $c \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $l \in \mathrm{E}$.

$$c_n = a + \lambda_n(k_n - a)$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et $k_n \in \mathrm{K}$. Quitte à extraire, on suppose que (k_n) converge dans K. Les suites $(\|c_n - a\|)$ et $(\|k_n - a\|)$ convergent. Comme $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$, $k_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$|\lambda_n| = \frac{\|c_n - a\|}{\|k_n - a\|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\|c - a\|}{\|k - a\|}.$$

Par conséquent (λ_n) est bornée et quitte à extraire à nouveau on suppose que cette suite converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Par continuité des opérations,

$$c_n = a + \lambda_n(k_n - a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + \lambda(k - a) \in \mathcal{C}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{C} \text{ est fermé.}}$

Ce n'est plus vrai si K est seulement fermé :

$$\mathrm{K} = \{(x, y) \mid |xy| \geq 1,\ y \geq 0\}$$

est fermé, et

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\})) \cup \{(0, 0)\}$$

vérifie $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^2$ et $\overline{\mathcal{C}} = \mathbb{R}^2$. □

Exercice 13.5. On se place dans (K, d) un espace métrique compact. Soit $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties fermées non vides de K. Montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_n \neq \varnothing.$$

Solution. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathrm{F}_n$. Soit λ une valeur d'adhérence de cette suite, et φ une extractrice telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers λ. Montrons que $\forall p \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathrm{F}_p$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+p) \geq n+p \geq p$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{\varphi(n+p)} \in \mathrm{F}_p$. Or $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n+p)}$. F_p étant fermé, $\lambda \in \mathrm{F}_p$. □

Exercice 13.6. Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. On dit que f est localement lipschitzienne ssi :

$$\forall\, \omega \in \mathrm{E}, \quad \exists\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(\omega), \quad \exists\, \rho \in \mathbb{R}_+, \quad f_{|\mathrm{V}} \text{ est } \rho\text{-lipschitzienne}$$

Montrer que si (E, d) est compact et f localement lipschitzienne, f est lipschitzienne.

Solution. Supposons par l'absurde que f n'est pas lipschitzienne.

$$\forall\, \mathrm{R} > 0, \quad \exists\, (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \delta(f(x), f(y)) > \mathrm{R}d(x, y).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de $(x_n, y_n) \in \mathrm{E}^2$ tel que $\delta(f(x_n), f(y_n)) > nd(x_n, y_n)$. On extrait de (x_n) une sous-suite convergente dont on note $\lambda \in \mathrm{E}$ la limite, à l'aide de φ extractrice. De même on extrait de $(y_{\varphi(n)})$ une sous-suite convergente, dont on note μ la limite, à l'aide de ψ extractrice. On pose $u_n = x_{\varphi\circ\psi(n)}$ et $v_n = y_{\varphi\circ\psi(n)}$ pour tout $n \geq 1$.

f est localement lipschitzienne, donc f est continue. Donc

$$f(u_n) \to f(\lambda) \quad \text{et} \quad f(v_n) \to f(\mu).$$

Puisque

$$d(u_n, v_n) \leq \frac{\delta(f(u_n), f(v_n))}{n}$$

pour tout $n \geq 1$,

$$\delta(f(u_n), f(v_n)) \to \delta(f(\lambda), f(\mu))$$

donc $d(u_n, v_n) \to 0$; or $d(u_n, v_n) \to d(\lambda, \mu)$ donc $\lambda = \mu$.

Soient $\mathrm{V} \in \mathcal{V}(\lambda)$ et $\rho > 0$ tel que $f_{|\mathrm{V}}$ est ρ-lipschitzienne. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N} > \rho$ et

$$n \geq \mathrm{N} \Longrightarrow (u_n, v_n) \in \mathrm{V}^2$$

Soit $n \geq \mathrm{N}$.

$$nd(u_n, v_n) < \delta(f(u_n), v_n)) \leq \rho d(u_n, v_n)$$

Absurde.

$$\boxed{f \text{ localement lipschitzienne } \Longrightarrow f \text{ lipschitzienne}}$$

□

Exercice 13.7. On se place dans $l_1(\mathbb{N})$ muni de $\|u\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Montrer que $\mathrm{B}_f(0, 1)$ n'est pas compacte.

Solution. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la suite $u^p = (\delta_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u^p \in \mathrm{B}_f(0, 1)$. Par ailleurs, $p \neq q \Rightarrow \|u^p - u^q\| = 2$. On ne peut donc extraire de sous-suite convergente de $(u^p)_{p\geq 0}$, du fait de l'inégalité triangulaire. □

Exercice 13.8. Soit (K, d) un compact métrique, et (L, δ) un métrique quelconque. Montrer que toute bijection continue de K dans L est un homéomorphisme.

Solution. Soit U un fermé de K. U est compact. $(f^{-1})^{-1}(\mathrm{U}) = f(\mathrm{U})$ compact donc fermé. Ainsi f^{-1} est continue. □

Exercice 13.9. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution. L'application $t : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^t\mathrm{M}$ est polynomiale donc continue. Or $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = t^{-1}(\mathrm{I}_n)$ donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}$ est fermé.

Pour tout $1 \le i \le n$,

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{ik}({}^t\mathrm{A})_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{ik}^2$$

Donc $|\mathrm{A}_{ik}| \le 1$ pour tout $1 \le i, k \le n$ et donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}$ est borné. On est en dimension finie, donc $\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est compact.}}$ □

Exercice 13.10. Soit E un e.v.n de dimension finie et A un compact non trivial de E.

1. Montrer qu'il existe une boule de rayon minimal contenant A.
2. On suppose dans la suite E euclidien. Montrer que cette boule est unique.
3. Soit $(\mathrm{G}, \circ)$ le groupe des isométries affines de E et $\Gamma = \{f \in \mathrm{G} \mid f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}\}$. Vérifier que Γ est un sous-groupe de $(\mathrm{G}, \circ)$.
4. Établir l'existence de $\omega \in \mathrm{E}$ tel que :

$$\forall\, f \in \Gamma,\ f(\omega) = \omega.$$

5. Montrer que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathcal{O}(\mathrm{E}), \circ)$.

Solution. **1.** Considérons

$$\mathrm{L} = \{\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+^* \mid \exists\, \omega \in \mathrm{E},\ \mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{B}}(\omega, \mathrm{R})\}$$

Il s'agit de prouver que L admet un minimum. Comme A est borné, $\mathrm{L} \neq \varnothing$. On se donne $\omega \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{R} > 0$ tels que $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{B}}(\omega, \mathrm{R})$. Posons $r = \inf \mathrm{L}$. Montrons que $r \in \mathrm{L}$. Soit $(\rho_n) \in \mathrm{L}^{\mathbb{N}}$ telle que $\rho_n \to r$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on se donne $\omega_n \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{B}}(\omega_n, \rho_n)$. Soit $a \in \mathrm{A}$.

$$\begin{aligned} \|\omega_n\| &\le \|\omega_n - a\| + \|a\| \\ &\le \rho_n + \|a\| \\ &\le \rho_n + \mathrm{R} \end{aligned}$$

donc (ω_n) est bornée. Quitte à extraire, on la suppose convergente et on note ω' sa limite. De là, pour $a \in \mathrm{A}$,

$$\begin{aligned} \|\omega_{\varphi(n)} - a\| &\le \rho_{\varphi(n)} \\ \|\omega - a\| &\le r \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{B}}(\omega, r)$. Comme A n'est pas trivial, on a bien $r > 0$ et $r \in \mathrm{L}$.

2. Soient ω_1, ω_2 tels que $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{B}}(\omega_1, r)$ et $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{B}}(\omega_2, r)$. On pose

$$c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

et on se donne $a \in \mathrm{A}$.

$$\begin{aligned}\|a-c\|^2 &= \left\|\frac{a-\omega_1}{2}+\frac{a-\omega_2}{2}\right\|^2\\ &= \frac{1}{4}\left(2\|a-\omega_1\|^2+2\|a-\omega_2\|^2-\|\omega_2-\omega_1\|^2\right)\\ &\leq r^2-\frac{\|\omega_2-\omega_1\|^2}{4}\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{B}}\left(c, \sqrt{r^2-\frac{\|\omega_2-\omega_1\|^2}{4}}\right)$$

ce qui impose par minimalité de r l'égalité $\omega_1 = \omega_2$.

3. Simple vérification.

4. Soit $\overline{\mathrm{B}}(\omega, r)$ la boule de rayon minimal contenant A. Soit $f \in \Gamma$.

$$\mathrm{A} = f(\mathrm{A}) \subset f(\overline{\mathrm{B}}(\omega, r)) = \overline{\mathrm{B}}(f(\omega), r)$$

donc $f(\omega) = \omega$.

5. L'application

$$\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}\ell(\mathrm{E}) \\ f & \longmapsto & \overrightarrow{f}\end{array}\right.$$

est un morphisme de groupe. Son noyau est les translations. $\Phi(\Gamma) \subset \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $\ker \Phi \cap \Gamma = \{id\}$ donc $\Phi_{|\Gamma}$ injective.

$$\boxed{\Gamma \text{ isomorphe à un sous-groupe de } (\mathcal{O}(\mathrm{E}), \circ)}$$

□

Exercice 13.11 (Ensemble de Cantor)**.**

$$\mathrm{C} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid (a_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*}\right\}$$

1. Montrer que C est compact, qu'il ne contient aucun intervalle non réduit à un point et qu'il est sans point isolé.

2. Construire une surjection continue de C sur $[0,1]$. *Remarque. Ceci reste vrai en remplaçant* $[0,1]$ *par n'importe quel compact métrique non vide.*

Exercice 13.12. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ injective et continue.
Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur lui-même.

Exercice 13.13 (Dilatation d'un compact)**.** Soit (K, d) un espace métrique compact.

1. Soit $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{K}$ conservant les distances :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2, \quad d(f(x), f(y)) = d(x,y).$$

Montrer que f est un homéomorphisme de K sur lui-même.

2. Soit $g : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{K}$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2, \quad d(g(x), g(y)) \geq d(x,y).$$

Montrer que g est encore un homéomorphisme de K sur lui-même.

Solution. **1.** On remarque que f est injective et continue. Montrons qu'elle est surjective. Soit $x \in \mathrm{K}$. La suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence λ. Soit j extractrice telle que

$$f^{j(n)}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f^{j(n+1)-j(n)}(x), x) = d(f^{j(n+1)}(x), f^{j(n)}(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

Quitte à extraire, on suppose que $j(n+1) - j(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$. La suite $(f^{j(n+1)-j(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Conclusion : $x \in \overline{f(\mathrm{K})} = f(\mathrm{K})$. f est surjective, donc bijective, et comme elle conserve les distances, c'est un homéomorphisme.

2. On remarque que g est injective. La démonstration précédente appliquée à g fournit

$$\mathrm{K} \subset \overline{g(\mathrm{K})}.$$

Soit $(x,y) \in \mathrm{K}^2$. La suite $(d(g^k(x), g^k(y)))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée dans $\mathbb{R}_+$ donc converge vers une limite $\mathrm{L} \in \mathbb{R}_+$.
On extrait, grâce à $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractice, une sous-suite convergente de $((g^k(x), g^k(y)))_{k\in\mathbb{N}}$ dont on note $(a,b) \in \mathrm{K}^2$ la limite. Par passage à la limite,

$$\mathrm{L} = d(a,b).$$

Quitte à extraire à nouveau, on suppose que

$$\Psi(k+1) - \Psi(k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Or

$$d(g^{\Psi(k+1)-\Psi(k)}(x), x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$d(g^{\Psi(k+1)-\Psi(k)}(y), y) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc finalement

$$d(x,y) = \lim_{k\to+\infty} d(g^{\Psi(k+1)-\Psi(k)}(x), g^{\Psi(k+1)-\Psi(k)}(y)) = \lim_{k\to+\infty} d(g^k(x), g^k(y)) = \mathrm{L}$$

ce qui fournit

$$d(g(x), g(y)) \leq d(x,y).$$

Ainsi g conserve les distances : on s'est ramené au cas précédent.

$$\boxed{g \text{ est un homéomorphisme}}$$

□

Chapitre 14

Connexité

Exercice 14.1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique compact (E, d) vérifiant $\lim d(u_n, u_{n+1}) = 0$ est connexe.

Exercice 14.2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que

(i) u est bornée

(ii) $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Montrer que $\Lambda(u)$ est connexe.

Solution. Supposons par l'absurde que $\Lambda(u)$ n'est pas connexe. Soient K et L deux ouverts disjoints non vides de E recouvrant $\Lambda(u)$. Ce sont des fermés de $\Lambda(u)$, bornés donc compacts. Posons

$$r = \min\{\mathrm{N}(x - y),\ (x, y) \in \mathrm{K} \times \mathrm{L}\} \neq 0.$$

Soit $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \leq \mathrm{N}_1 \Rightarrow \mathrm{N}(u_{n+1} - u_n) \leq \frac{r}{3}.$$

Considérons

$$\mathrm{L}' = \left\{x \in \mathrm{E},\ d(x, \mathrm{L}) \leq \frac{r}{3}\right\} \text{ et } \mathrm{K}' = \left\{x \in \mathrm{E},\ d(x, \mathrm{K}) \leq \frac{r}{3}\right\}$$

ainsi que

$$\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{K}'\} \text{ et } \mathrm{B} = \{n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{L}'\}.$$

A et B sont infinis et on a évidemment $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$. De même,

$$\mathrm{C} = \{n \in \mathbb{N},\ n \in \mathrm{A} \text{ et } n + 1 \notin \mathrm{A}\}$$

est infini. Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathrm{C}$ strictement croissante. À l'aide de φ on extrait de $(u_{\psi(n)+1})$ une suite convergeant vers $\lambda \in \mathrm{K} \cup \mathrm{L}$. Par construction,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(u_{\varphi\circ\psi(n)+1}, \mathrm{K}) \geq \frac{r}{3}$$

et donc en passant à la limite on obtient que $d(\lambda, \mathrm{K}) \geq \frac{r}{3}$. On a également

$$d(u_{\varphi\circ\psi(n)+1}, \mathrm{L}) \geq -\mathrm{N}(u_{\varphi\circ\psi(n)+1} - u_{\varphi\circ\psi(n)}) + d(u_{\varphi\circ\psi(n)}, \mathrm{L}) \geq d(u_{\varphi\circ\psi(n)}, \mathrm{L}) - \frac{r}{3}$$

Soit $x \in \mathrm{L}$ tel que
$$d(u_{\varphi\circ\psi(n)}, \mathrm{L}) = \mathrm{N}(u_{\varphi\circ\psi(n)} - x)$$
et y tel que
$$d(x, \mathrm{K}) = \mathrm{N}(x - y).$$
Comme [1]
$$d(x, \mathrm{K}) \leq \mathrm{N}(x - u_{\varphi\circ\psi(n)}) + \mathrm{N}(u_{\varphi\circ\psi(n)} - y) \leq d(u_{\varphi\circ\psi(n)}, \mathrm{L}) + \frac{r}{3}$$
on obtient
$$d(u_{\varphi\circ\psi(n)}, \mathrm{L}) \geq \frac{2r}{3}$$
et
$$d(u_{\varphi\circ\psi(n)+1}, \mathrm{L}) \geq \frac{r}{3}$$
donc en passant à la limite
$$d(\lambda, \mathrm{L}) \geq \frac{r}{3}$$
et donc $\lambda \notin \mathrm{L}$ ce qui est absurde. Conclusion : $\boxed{\Lambda(u) \text{ est connexe}}$. □

Exercice 14.3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie et C un compact de E. Montrer que $\mathrm{E} \setminus \mathrm{C}$ est connexe par arcs.

Solution. Soit $\mathrm{R} > 0$ tel que
$$\mathrm{K} \subset \mathrm{B}(0, \mathrm{R}).$$
$\mathrm{E} \setminus \mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ est connexe par arcs : on peut au choix soit considérer
$$t \longmapsto \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|}$$
soit se placer dans un plan.

Soit $x \in (\mathrm{E} \setminus \mathrm{K}) \cap \mathrm{B}(0, \mathrm{R})$. Soit $\mathrm{R}' > 0$ tel que
$$\mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \subset \mathrm{B}(x, \mathrm{R}')$$
Supposons que
$$\forall\, u \in \mathrm{E}, \quad \|u\| = 1, \quad \{x + \mathbb{R}u\} \cap \mathrm{K} \neq \varnothing.$$
Alors
$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathrm{S}(x, \mathrm{R}) \\ y & \longmapsto & x + \mathrm{R}\frac{x-y}{\|x-y\|} \end{array} \right.$$
est surjective et continue. Donc $f(\mathrm{K}) = \mathrm{S}(x, \mathrm{R})$ est compact, ce qui est absurde en dimension finie ! [2] *On peut donc bien sortir en ligne droite...*

Autre preuve : les composantes connexes de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{K}$ sont des ouverts, du fait de la convexité des boules. On note W la composante connexe par arcs non bornée de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{K}$ et on suppose que $\mathrm{W} \neq \mathrm{E} \setminus \mathrm{K}$. Soit $a \in (\mathrm{E} \setminus \mathrm{K}) \setminus \mathrm{W}$ et U la c.c.p.a de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{K}$ qui contient a. U est un ouvert, on dispose donc de $r > 0$ tel que
$$\overline{\mathrm{B}}(a, r) \subset \mathrm{U}.$$

1. Faire un dessin aide beaucoup dans ce genre de situation.
2. Ô Saint Riesz, priez pour nous...

On retombe alors sur la même idée : l'application

$$\Pi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathrm{S}(a,r) \\ x & \longmapsto & r\frac{x}{\|x\|} \end{array} \right.$$

est continue et surjective, on abouti à une autre absurdité en dimension infinie. □

Exercice 14.4. Montrer que

$$\mathrm{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \det \mathrm{M} = 1\}$$

est connexe par arcs.

Solution. On munit $\mathrm{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ de la topologie induite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$. Construisons un chemin de M à I_n. Pour $1 \leq k, l \leq n$ considérons

$$\mathrm{E}^{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

L'ensemble

$$\mathcal{G} = \{\mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{E}^{kl},\ \lambda \in \mathbb{R}, k \neq l\}$$

est un système générateur de $(\mathrm{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{R}), \times)$. Écrivons

$$\mathrm{M} = \mathrm{G}_1 \times \ldots \times \mathrm{G}_s$$

où

$$\forall i \in [\![1,s]\!] \quad \mathrm{G}_i = \mathrm{I}_n + \lambda_i \mathrm{E}^{k_i l_i} \in \mathcal{G}$$

et si $t \in [0,1]$ posons

$$\mathrm{G}_i(t) = \mathrm{I}_n + t\lambda_i \mathrm{E}^{k_i l_i}.$$

Par continuité des opérations,

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathrm{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \mathrm{G}_1(t) \times \ldots \times \mathrm{G}_s(t) \end{array} \right.$$

est un chemin de M à I_n. Ainsi $\mathrm{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. □

Exercice 14.5. Montrer que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Solution. Si C est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle, on dispose de $(a,b) \in \mathrm{C}^2$ et $x \in \mathrm{C} \setminus \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et donc $\mathrm{C} \subset]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$ qui n'est pas connexe.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si Montrons que I est connexe. Si I est un singleton, c'est évident. Supposons donc que $\mathrm{I} =]a,b[$ Soit $f : \mathrm{I} \to \{0,1\}$ continue et supposons qu'elle n'est pas constante. On dispose de $x, y \in \mathrm{I}$ vérifiant par exemple $a < x < y < b$, $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Considérons la borne supérieur de $\{z \geq a, \forall t \in [a,z]\, f(t)\}$. Par continuité de f, on peut trouver un élément de cet ensemble plus grand que sa borne sup, c'est absurde.

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est compris entre un intervalle et son adhérence. Donc tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe. □

Exercice 14.6 (Matrices à diagonale dominante)**.** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale dominante-ligne c'est-à-dire que

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |\mathrm{A}_{ii}| > \sum_{j \neq i} |\mathrm{A}_{ij}|$$

1. Montrer que A est inversible.

2. Montrer que le $\det \mathrm{A}$ a le signe de $\mathrm{A}_{11} \ldots \mathrm{A}_{nn}$.

<u>Solution</u>. **1.** Montrons que A est inversible. Raisonnons par l'absurde et supposons que A n'est pas inversible. Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $\mathrm{AX} = 0$.

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij}\mathrm{X}_j = 0$$

Soit i_0 tel que $|\mathrm{X}_{i_0}| = \|\mathrm{X}\|_\infty$.

$$\mathrm{A}_{i_0 i_0}\mathrm{X}_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} \mathrm{A}_{i_0 j}\mathrm{X}_j$$

donc

$$|\mathrm{A}_{i_0 i_0}\mathrm{X}_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |\mathrm{A}_{i_0 j}||\mathrm{X}_j| \leq \sum_{j \neq i_0} |\mathrm{A}_{i_0 j}||\mathrm{X}_{i_0}| < |\mathrm{A}_{i_0 i_0}||\mathrm{X}_{i_0}|$$

ce qui est absurde. Donc A est inversible.

2. Montrons que le $\det \mathrm{A}$ a le signe de $\mathrm{A}_{11}...\mathrm{A}_{nn}$. Construisons un chemin de A à

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pour $t \in [0, 1]$ on pose

$$\mathrm{A}_t = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & t\mathrm{A}_{12} & \cdots & t\mathrm{A}_{1n} \\ t\mathrm{A}_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t\mathrm{A}_{n-1\,n} \\ t\mathrm{A}_{n\,1} & \cdots & t\mathrm{A}_{n\,n-1} & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

qui vérifie les mêmes propriétés que A, avec $\det \mathrm{A}_t \in \mathbb{R}^*$. L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \det \mathrm{A}_t \end{array} \right.$$

est continue, car polynomiale. Ne s'annulant pas, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ ont le même signe, ce qui achève la démonstration.

□

Exercice 14.7. Montrer que

$$\mathcal{G}\ell_n^+(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M},\ \det \mathrm{M} > 0\}$$

est connexe par arcs.

<u>Solution</u>. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{G}\ell_n^+(\mathbb{R})$. L'application

$$\delta : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, 1] & \to & \mathcal{G}\ell_n^+(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \mathrm{A} \times \begin{pmatrix} \frac{1-t}{\det \mathrm{A}} + t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un chemin d'un élément de $\mathrm{S}\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ à A. $\square$

Exercice 14.8. Soit (E, d) un espace métrique et $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts connexes non vides.
Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$ est un compact connexe non vide.

Solution. Montrons le résultat par contraposée. Supposons donc que $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides et que $\mathrm{S} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$ n'est pas connexe. Montrons alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que K_n n'est pas connexe.

Le théorème **??** assure que $\mathrm{S} \neq \varnothing$. Soient F et G des fermés disjoints non vides de S et recouvrant S. Considérons

$$r = \min\{\mathrm{N}(y-x),\, (x,y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{F}\} \neq 0$$

Soient

$$\mathrm{U} = \left\{x \in \mathrm{K}_0,\, d(x, \mathrm{F}) < \frac{r}{3}\right\} \text{ et } \mathrm{V} = \left\{x \in \mathrm{K}_0,\, d(x, \mathrm{G}) < \frac{r}{3}\right\}$$

qui sont des ouverts disjoints de K_0. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathrm{K}_n \subset \mathrm{U} \cup \mathrm{V}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathrm{L}_n = \mathrm{K}_n \cap (\mathrm{K}_0 \setminus (\mathrm{U} \cup \mathrm{V}))$$

qui est un fermé de K_0, lui-même compact, donc L_n est compact. La suite (L_n) est décroissante pour l'inclusion et d'intersection

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{L}_n = \varnothing.$$

Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{L}_n = \varnothing$ (on utilise une nouvelle fois le théorème **??** du chapitre 4).

Ainsi on dispose de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{K}_n \subset \mathrm{U} \cup \mathrm{V}$. K_n n'est pas connexe car $\mathrm{S} = \mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ avec F et G non vides et par exemple

$$\mathrm{F} = \mathrm{S} \cap \mathrm{F} \subset \mathrm{K}_n \cap \mathrm{F} \subset \mathrm{K}_n \cap \mathrm{U}$$

donc $\mathrm{K}_n \cap \mathrm{U} \neq \varnothing$ et par symétrie $\mathrm{K}_n \cap \mathrm{V} \neq \varnothing$. $\square$

Exercice 14.9. Existe-t-il $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bijective et continue ?

Solution. Si f est continue et bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ est l'image continue d'un connexe (par arcs), dont est connexe (par arcs). Or $f(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) =]-\infty, f((0,0))[\cup]f((0,0)), +\infty[$ qui n'est pas connexe. Absurde. $\square$

Exercice 14.10. Pourquoi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est-il pas connexe par arcs ? Quelles sont ses composantes connexes par arcs ?

Chapitre 15

Suites de fonctions

Exercice 15.1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que chaque fonction f_n est croissante et que (f_n) converge simplement vers une fonction l continue. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 15.2 (Théorème de Dini)**.** On considère (K, d) un compact métrique. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers 0. Montrer que la convergence est uniforme.

Solution. Puisque (f_n) décroît, la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est également décroissante, et minorée par 0. Donc $(\|f_n\|_\infty)$ possède une limite $l \geq 0$.

f_n est continue et positive, donc f_n atteint son maximum sur K compact. On choisit $x_n \in \mathrm{K}$ tel que $f_n(x_n) = \|f_n\|_\infty$.

Si $1 \leq p \leq n$,

$$f_p(x_n) \geq f_n(x_n) \geq l$$

donc si $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_p(x_{n+p}) \geq l$$

On extrait de $(x_{p+n})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente : $x_{p+j(n)} \to \omega \in \mathrm{K}$. Alors

$$f_p(\omega) = \underset{n\to\infty p}{f}(x_{p+j(n)}) \geq l \geq 0$$

or $f_p(\omega) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement $l = 0$. Finalement $(\|f_n\|_\infty)$ tend vers 0, c'est le résultat attendu.

Une autre preuve consiste à considérer, pour $\varepsilon > 0$ fixé, la suite décroissante de compacts (K_n) définie par

$$\mathrm{K}_n = \{x \in \mathrm{K} \mid f_n(x) \geq \varepsilon\}$$

Cette suite décroissante de compacts est d'intersection vide, donc il existe n_0 tel que $\mathrm{K}_n = \varnothing$ pour $n \geq n_0$, ce qui fournit le résultat. $\square$

Exercice 15.3 (Théorème de dérivation)**.** Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un e.v.n de dimension finie.
Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose de plus :
- $\exists a \in \mathrm{I},\ (f_n(a))$ converge
- (f_n') converge uniformément sur toute partie bornée de I vers une fonction $\varphi : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$

Montrer que
- (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ sur toute partie bornée de I
- f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = \varphi$

<u>*Solution*</u>. Soit $x \in \mathrm{I}$. (f_n') converge uniformément vers φ sur $[a, x]$, donc

$$\int_a^x f_n' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^x \varphi$$

Par conséquent,

$$f_n(x) = \int_a^x f_n' + f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^x \varphi + \underbrace{\lim f_n(a)}_{:=l}$$

On définit donc à bon droit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \to & \mathrm{E} \\ x & \mapsto & l + \displaystyle\int_a^x \varphi(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

de telle sorte que (f_n) converge simplement vers f. Par ailleurs, $f' = \varphi$. Reste à prouver que la convergence est uniforme sur toute partie bornée de I. Il suffit pour cela de prouver qu'elle l'est sur tout segment de I contenant a.

Soit J un segment de I, dont on note δ la longueur. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \forall x \in \mathrm{J}\ \|f'n(x) - \varphi(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Soit $\mathrm{N}' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \|f_n(a) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

Pour $n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$ et $x \in \mathrm{J}$,

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f(x)\| &\leq \|f_n(a) - f(a)\| + \|f_n(x) - f_n(a) - (f(x) - f(a))\| \\ &\leq \varepsilon + \left\| \int_a^x f_n' - \int_a^x \varphi \right\| \\ &\leq \varepsilon + \left| \int_a^x \|f_n'(t) - \varphi(t)\| \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \varepsilon + \left| \int_a^x \frac{\varepsilon}{\delta} \right| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 15.3.1. On peut remplacer l'hypothèse de continuité de la dérivée par l'hypothèse plus faible de dérivabilité. La démonstration du résultat passe alors par l'utilisation de suites de Cauchy appuyée par l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 15.4 (Théorème de la double limite)**.** Soient (X, d) un espace métrique, Ω une partie de X et $\omega \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$.
Soient $(\mathrm{E}, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie / complet et (f_n) une suite de fonctions de Ω dans E. On suppose que :

(i) chaque f_n possède une limite en ω ;

(ii) $f_n \xrightarrow{\mathrm{CU}} l$ sur Ω.

Montrer que l possède une limite en ω et que

$$\lim_{\Omega \ni x \to \omega} l(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{\Omega \ni x \to \omega} f_n(x) \right)$$

Solution. On pose $u_n = \lim\limits_{\Omega \ni x \to \omega} f_n(x)$. Montrons que (u_n) est de Cauchy.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \Omega, \quad n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \|f_n(x) - l(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soient $p, q \geq \mathrm{N}$.

$$\|u_p - u_q\| = \|underset\Omega \ni x \to \omega \lim f_p(x) - underset\Omega \ni x \to \omega \lim f_q(x)\| = underset\Omega \ni x \to \omega \lim \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$$

donc (u_n) est de Cauchy, donc converge par hypothèse.

Reste à prouver que l possède une limite en ω et que c'est précisément la limite de (u_n) que l'on note L.

Soient ε et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \Omega, \quad n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \|f_n(x) - l(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \|u_n - \mathrm{L}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit η tel que

$$\forall x \in \mathcal{B}(\omega, \eta) \cap \Omega, \quad \|f_\mathrm{N}(x) - u_\mathrm{N}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $x \in \mathcal{B}(\omega, \eta) \cap \Omega$.

$$\begin{aligned} l(x) - \mathrm{L}\| &\leq \|f(x) - f_\mathrm{N}(x)\| + \|f_\mathrm{N}(x) - u_\mathrm{N}\| + \|u_\mathrm{N} - \mathrm{L}\| \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

et donc $l(x)$ tend vers L lorsque x tend vers ω. Le théorème est prouvé. □

Exercice 15.5. On considère (K, d) un compact métrique. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$.
Montrer que (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si pour toute suite u à valeurs dans K et convergente, $f_n(u_n) \to f(\lim u)$.

Exercice 15.6 (Théorème de sélection de Helly)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que chaque (f_n) croît et que pour chaque $x \in \mathbb{R}$ la suite $(f_n(x))$ est bornée.
Montrer que l'on peut extraire de (f_n) une suite qui converge simplement.

Preuve à rédiger... ! La fonction pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ est, si l est la limite simple sur $\mathbb{Q}$,

$$\mathrm{L} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup\limits_{\mathbb{Q} \ni y \leq x} l(y) \end{array} \right.$$

qui est bien définie et croissante. On montre aisément que la suite extraire converge simplement vers L *en tout point de continuité de* L.

Exercice 15.7 (Polynômes de Bernstein). **1.** Soient x un réel et n un entier naturel. Montrer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

2. Soient $x \in [0,1]$ et $\delta > 0$. On pose

$$\Delta_n(x) = \{k \in [\![0,n]\!] \mid \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta\}$$

Montrer

$$\sum_{k \in \Delta_n(x)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose

$$\mathrm{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \text{pour } x \in [0,1] \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $\mathrm{B}_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$.

4. Établir le théorème de Weierstrass sur un segment quelconque.

Exercice 15.8 (Théorème de Chudnovsky). Soient $a, b \in]0,1[$ avec $a < b$, et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer qu'il existe une suite de polynômes à coefficients entiers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Solution. On munit $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. On pose

$$\mathcal{A} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue et limite uniforme de fonctions polynomiales à coefficients entiers}\}$$

$$\mathcal{P} = \{p : [a,b] \to \mathbb{R} \mid g \text{ polynomiale à coefficients entiers}\}$$

On a $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{P}}$ par définition des deux ensembles. Le but est de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Observons $\mathcal{A}$. Cet ensemble est stable par addition (inégalité triangulaire pour $\| \|_\infty$) mais aussi par produit : étant donnés $f, g \in \mathcal{A}$ et f_n, g_n deux suites de polynômes entiers convergeant uniformément respectivement vers f et g,

$$\begin{aligned} \|fg - f_n g_n\|_\infty &\leq \|fg - fg_n\|_\infty + \|fg_n - f_n g_n\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty \|g - g_n\|_\infty + \underbrace{\|g_n\|}_{\text{borné}} \|f - f_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

On suppose à présent que

$$\mathcal{B} = \{c \in \mathbb{R} \mid (x \mapsto c) \in \mathcal{A}\}$$

est d'intersection non vide avec $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $\mathcal{B}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, car l'injection canonique de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est une isométrie, donc est continue, et $\mathcal{B}$ est l'image réciproque du s.e.v des fonctions constantes, qui est de dimension 1 donc est fermé. De plus, il contient tous les entiers.

$\mathcal{B}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, donc est soit monogène soit dense dans $\mathbb{R}$. Étant fermé, $\mathcal{B}$ est soit monogène soit $\mathbb{R}$ tout entier. Or, puisque $\mathcal{B}$ est stable par addition, par produit et contient les entiers, étant donné $\omega \in \mathcal{B}\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et $u = \omega - \lfloor\omega\rfloor$, on a $u^n \to 0$ et u^n dans $\mathcal{B}$ donc $\mathcal{B}$ ne pas être monogène. Donc $\mathcal{B} = \mathbb{R}$.

Par ailleurs, $x \mapsto x$ est dans $\mathcal{A}$, donc tout polynôme est dans $\mathcal{A}$, et en passant à l'adhérence, $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathrm{A} \subset \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ (Weierstrass). Il reste donc à prouver $\mathcal{B} \neq \varnothing$.

Considérons $\Psi : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Soit $\varphi \in \mathcal{A}$ telle que $\|\varphi\|_\infty < 1$.

$$\psi(\varphi(x)) = \frac{1}{1+\varphi(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n\varphi(x)^n}_{\text{C.V.N}}$$

ou encore la série converge uniformément. Donc $\varphi \in \mathcal{A}$. On note ω le nombre d'or : $\frac{1}{1+\omega} = \omega$ et $\omega \notin \mathbb{Z}$. On définit par récurrence

$$\varphi : x \mapsto x \quad \text{ et } \quad \varphi_n = \frac{1}{1+\varphi_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}^*$$

Alors pour $x \in [a,b]$,

$$|\varphi_n(x) - \omega| = \frac{|\omega - \varphi_{n-1}(x)|}{|1+\varphi_{n-1}(x)|(1+\omega)} \leq \frac{|\omega - \varphi_{n-1}x|}{1+\omega}$$

car la suite de fonctions est positive. Finalement

$$\|\varphi_n - \omega\|_\infty \leq \frac{\|\omega - \varphi_0\|_\infty}{(1+\omega)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui fournit $\omega \in \mathcal{B}$ et achève la démonstration. □

Exercice 15.9 (Théorème de Korovkin (1953)). Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Étant donné $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on dit que u est positif si :

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0$$

1. Soient $f \in \mathrm{E}$ et $\varepsilon > 0$. Établir l'existence de $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \mathrm{K}|y-x|^2$$

2. Soit (u_n) une suite d'endomorphismes positifs sur E. On suppose que pour toute fonction p polynomiale de degré inférieur ou égal à deux, $u_n(p)$ converge uniformément vers p sur $[0,1]$. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, $u_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3. En déduire le théorème de Bernstein en introduisant :

$$u_n : f \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \end{array} \right.$$

Solution. **1.** On peut raisonner par l'absurde et extraire dans $[0,1]$, ou bien procéder comme suit, ce qui fournit une domination explicite : par le théorème de Heine, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $(x, y) \in [0,1]^2$ tel que $|x-y| \geq \eta$. Alors $\frac{(x-y)^2}{\eta^2} \geq 1$ et

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}(x-y)^2$$

ce qui fournit finalement

$$\forall\,(x, y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}(x-y)^2$$

2. On prouve pour commencer le lemme suivant :

Lemme 15.9.1. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On fixe $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_\mathrm{N}$ polynomiales de degré 2 telles que*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) \leq \inf_{1 \leq i \leq s} \mathrm{Q}_i(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Preuve. On se donne $\mathrm{K} \geq 0$ comme dans la question précédente. Pour y dans $[0,1]$ on pose

$$\mathrm{P}_y : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(y) + \mathrm{K}(x-y)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

On a, toujours d'après la question précédente,

$$\forall\,(x, y) \in [0,1]^2, \quad f(x) \leq \mathrm{P}_y(x)$$

et on pose à bon droit

$$\mathrm{M} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \inf\limits_{0 \leq y \leq 1} \mathrm{P}_y(x) \end{array} \right.$$

On a alors

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) \leq \mathrm{M}(x)$$

Soit η une constante d'uniforme continuité associée à f et $\frac{\varepsilon}{3}$ vérifiant $\mathrm{K}\eta^2 \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On vérifie aisément que l'on a

$$\forall\, y \in [0,1],\ \forall\, x \in [y-\eta, y+\eta] \cap [0,1] \quad \mathrm{P}_y(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

On choisit $(y_i)_{1 \leq i \leq \mathrm{N}}$ une suite finie croissante de $[0,1]$, vérifiant $y_0 = 0$, $y_\mathrm{N} = 1$ et $|y_{i+1} - y_i| < \eta$ pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$. Pour $x \in [0,1]$, on a successivement

$$f(x) \leq \mathrm{M}(x) \leq \mathrm{P}_{y_i}(x) \leq f(x) + \epsilon \quad \forall 1 \leq i \leq \mathrm{N}$$

$$f(x) \leq \inf_{0 \leq i \leq \mathrm{N}} \mathrm{P}_{y_i}(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

Le lemme est prouvé.

Soient $\mathrm{Q}_1, ..., \mathrm{Q}_t$ et $\mathrm{P}_1, ..., \mathrm{P}_s$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 tels que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) - \varepsilon \leq \sup_{1 \leq i \leq t} \mathrm{Q}_i(x) \leq f(x) \leq \sup_{1 \leq j \leq s} \mathrm{P}_j(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geq \mathrm{N},\ \forall j \in [1, ..., s], \quad \|u_n(\mathrm{P}_j) - \mathrm{P}_j\|_\infty \leq \varepsilon$$

On a alors, puisque (u_n) est une suite d'endomorphismes positifs, pour tout $n \geq \mathrm{N}$:

$$u_n(f) \leq u_n(\inf \mathrm{P}_j) \leq \inf u_n\mathrm{P}_j \leq \inf \mathrm{P}_j + \varepsilon \leq f + 2\varepsilon$$

On fait de même à gauche. Pour n assez grand on a donc

$$f - 2\varepsilon \leq u_n(f) \leq f + 2\varepsilon$$

3. On peut s'amuser à calculer les images par u_n de $e_0 : x \mapsto 1$, $e_1 : x \mapsto x$ et $e_2 : x \mapsto x^2$, c'est passionnant. On va plutôt exploiter la première question intelligemment. Pour cela, fixons $x \in [0,1]$. D'après la question 1, en développant,

$$|f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + \mathrm{K}(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0)$$

D'où l'on tire par positivité de u_n, pour y dans $[0,1]$:

$$|u_n(f)(y) - f(x)u_n(e_0)(y)| \leq \varepsilon u_n(e_0)(y) + \mathrm{K}(u_n(e_2)(y) - 2xu_n(e_1)(y) + x^2 u_n(e_0)(y)|$$

or

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leq |u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x)| + |f(x)||u_n(e_0)(x) - 1|$$

on obtient donc :

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leq \|f\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty + \varepsilon \|u_n(e_0)\|_\infty + \mathrm{K}\underbrace{(u_n(e_2)(x) - 2xu_n(e_1)(x) + x^2 u_n(e_0)(x)|}_{\overset{\text{C.U.}}{\longrightarrow} 0} \leq 2\varepsilon$$

pour n assez grand.

$\square$

Exercice 15.10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ séparément continue.
Montrer que f est limite simple d'une suite de fonctions continues.

Exercice 15.11 (Divagations ascoliques)**.** Soit (K, d) un métrique compact non vide. On se place dans $(\mathcal{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ et on se donne $\mathrm{R} > 0$ et $\mathrm{A} > 0$.
Montrer que

$$\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{R}) = \{f : \mathrm{K} \to \mathbb{R} \mid f\mathrm{R}\text{-lipschitzienne et } \|f\|_\infty \mathrm{A}\}$$

est compact.

Solution. La démarche de la preuve est la suivante :

1. Montrer que K est séparable. On note D la partie dénombrable de K telle que $\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{K}$.

2. Extraire d'une suite donnée (f_p) de $\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{R})$ une sous-suite qui converge sur D (par procédé diagonal).

3. Montrer que $(f_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour tout x dans K.

4. Montrer que la convergence est uniforme à l'aide de la propriété de pré-compacité.

$\square$

Chapitre 16

Séries de fonctions

Exercice 16.1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n : t \in [0,1] \longmapsto x^n f(x) \in \mathbb{R}.$$

Donner une c.n.s sur f pour que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Solution. Condition nécessaire. Comme la convergence est uniforme sur $[0,1]$, la somme est continue. Le théorème de la double limite fournit

$$\mathbb{R} \ni \lim_{y \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} y^n f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{y \to 1^-} y^n f(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(1)$$

donc $f(1) = 0$. Soit $x \in [0,1[$.

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(convergence uniforme)}$$

donc f est dérivable 1 et $f'(1) = 0$.

Condition suffisante. On suppose f dérivable en 0 avec $f(1) = f'(1) = 0$. Soit $x \in [0,1[$. Comme f est continue sur $[0,1[$, f est bornée. De plus $f(1) = 1$. La série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

$$\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} x^n f(x) = \frac{f(x) x^{\mathrm{N}+1}}{1-x} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $1 > \eta > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1[$,

$$x \in [1-\eta, 1[\Rightarrow \frac{|f(x)|}{1-x} < \varepsilon.$$

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} (1-\eta)^n \|f\|_\infty < \varepsilon$$

Soit $x \in [0,1]$. On constate que

$$\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n(x) < \varepsilon.$$

Conclusion :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge uniformément sur } [0,1] \iff f \text{ dérivable en 1 et } f(1) = f'(1) = 0}$$

□

Exercice 16.2 (Fonction η de Riemann)**.** Montrer que

$$\eta : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 16.3. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et possédant une limite nulle en $+\infty$. Montrer qu'il existe une et une seule application $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et croissante vérifiant $u(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x+1) - u(x) = g(x).$$

Solution. Existence. On va s'intéresser à la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(n) - g(n+x)$. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq \lfloor x \rfloor$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} g(k) - \sum_{k=0}^{n} g(x+k) &\leq \sum_{k=0}^{n} g(k) - \sum_{k=0}^{n} g(\lfloor x \rfloor + k + 1) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} g(k) - \sum_{k=\lfloor x \rfloor+1}^{n+\lfloor x \rfloor+1} g(k) \\
\sum_{k=0}^{n} \underbrace{g(k) - g(x+k)}_{\geq 0} &\leq \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} g(k) + \sum_{k=\lfloor x \rfloor+1}^{n} g(k) - \sum_{k=\lfloor x \rfloor+1}^{n} g(k) - \sum_{k=n+1}^{n+\lfloor x \rfloor+1} g(k) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} g(k) - \lfloor x \rfloor g(\lfloor x \rfloor)
\end{aligned}$$

Par conséquent la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} g(n) - g(n+x)$ est majorée. Donc

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (g(n) - g(n+x)) \end{cases}$$

est bien définie et vérifie $u(x+1) - u(x) = g(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, tout en étant croissante et nulle en 0.

Soient $\mathrm{M} \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \mathrm{M}]$.

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (g(k) - g(x+k)) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (g(k) - g(\mathrm{M}+k)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} g(n) - g(n+x)$ est uniforme sur $[0, \mathrm{M}]$. De fait, u est continue sur tout $[0, \mathrm{M}]$ pour $\mathrm{M} \in \mathbb{N}^*$, donc l'est sur tout $\mathbb{R}_+$.

Unicité. Soit v une autre solution du problème. Posons $h = v - u$ qui de fait est 1-périodique. Soit $t \in [0, 1[$.

$$0 \leq v(n+t) - v(n) \leq v(n+1) - v(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $v(n+t) - v(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; de même pour u. De là,

$$h(t) - h(0) = h(n+t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $h(t) = h(0) = 0$. Finalement $u = v$.

$$\boxed{\exists!\, u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad u \text{ croissante, } u(0) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x+1) - u(x) = g(x).}$$

$\square$

Exercice 16.4. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. On tâche de construire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\mathrm{F} = f^{-1}(\{0\})$.

1. *Question préliminaire.* Construire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\mathrm{F} = g^{-1}(\{0\})$.

2. Soit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$.

3. Soit U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Construire $\varphi_{\mathrm{U}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, bornée sur $\mathbb{R}$ ainsi que chacune de ses dérivées successives et telle que

$$\varphi_{\mathrm{U}}^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus \mathrm{U}.$$

4. Montrer qu'il existe une suite d'intervalles ouverts $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\mathbb{R} \setminus \mathrm{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{U}_n.$$

5. Construire alors f comme somme d'une série $\sum_{n\geq 0} \lambda_n \varphi_{\mathrm{U}_n}$ où $(\lambda_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ est judicieusement choisie.

<u>*Solution.*</u> **1.** Considérer $x \mapsto d(x, \mathrm{F})$.

2. Appliquer le théorème de la limite de la dérivée aux dérivées successives de φ, qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. On pose $\mathrm{U} =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha < \beta$. Considérons

$$\varphi_{\mathrm{U}} : x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(x - \alpha)\varphi(\beta - x) \in \mathbb{R}_+$$

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, est bornée et vérifie $\varphi_{\mathrm{U}}^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus \mathrm{U}$.

4. $\mathbb{R} \setminus \mathrm{F}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$: il est classique de démontrer qu'il peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

5. Si l'union est finie, le résultat est évident. On suppose dans la suite que l'union est infinie. On se donne $(\mathrm{U}_n)_{n\geq 0}$ une suite d'intervalles ouverts deux à deux disjoints et $(\varphi_{\mathrm{U}_n})_{n\geq 0}$ une suite de fonctions associée à ces ouverts qui vérifie le cahier des charges de la troisième question. On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_n = \frac{1}{2^n(1 + \|\varphi_n\|_\infty + \|\varphi_n'\|_\infty + \dots + \|\varphi_n^{(n)}\|_\infty)} > 0$$

La série $\sum_{n\geq 0} \lambda_n \varphi_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La convergence de $\sum_{n\geq p} \lambda_n \varphi_n^{(p)}$ est normale sur $\mathbb{R}$, la somme de $\sum_{n\geq 0} \lambda_n \varphi_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(t) = 0 &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n \varphi_n(t) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(t) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ t \notin \mathrm{U}_n \\ &\iff t \in \mathrm{F} \end{aligned}$$

□

Exercice 16.5 (Fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ partout continue, nulle part dérivable). **1.** Soit $y \in \mathbb{R}$. Établir l'existence de $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\left|\sin\left(y + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) - \sin y\right| \geq 1.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$u_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{n!}\sin\left(n!^2 x\right) \end{array} \right.$$

et

$$\mathrm{S} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \end{array} \right.$$

Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On cherche à établir que S n'est pas dérivable en a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$\left|\sin\left(n!^2 a + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) - \sin n!^2 a\right| \geq 1$$

et on pose $h_n = \frac{\varepsilon_n \pi}{2n!}$.
On définit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k(a + h_n) - u_k(a)}{h_n}$$

et

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_k(a + h_n) - u_k(a)}{h_n}.$$

Montrer que $s_n = o(n!)$ et $r_n = o(n!)$. En déduire le résultat annoncé.

Solution. **1.** Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\left|\sin\left(y + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right) - \sin y\right| = 2\left|\cos\left(y + \frac{\varepsilon\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{-\varepsilon\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{2}\left|\cos\left(y + \frac{\varepsilon\pi}{2}\right)\right|$$

On écrit $y = 2k\pi + y'$ avec $0 \leq y < 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$. Une distinction de cas avec l'aide éventuellement d'un dessin fournit le résultat.

2. La convergence de $\sum u_n$ est normale sur $\mathbb{R}$; la continuité passe à la limite.

3. D'une part on a

$$|u_k(a+h_n) - u_k(a)| \leq \frac{|h_n|k!^2}{k!} = |h_n|k!$$

ce qui fournit

$$|s_n| \leq \sum_{k=1}^{n-1} k!$$

et de même,

$$|r_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k!}\frac{1}{|h_n|} = \frac{4n!}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Ainsi,

$$\frac{|s_n|}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{|r_n|}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc au bout du compte :

$$\left|\frac{\mathrm{S}(h_n+a) - \mathrm{S}(a)}{h_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi $\boxed{\text{S est non dérivable en tout point de } \mathbb{R}.}$

□

Exercice 16.6.

1. Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Établir l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont D est l'ensemble des points de discontinuité.

2. Soit Δ une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Établir l'existence d'une fonction convexe $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont Δ est l'ensemble des points de non-dérivabilité.

<u>*Solution.*</u> **1.** Notons $\mathrm{D} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $n \mapsto a_n$ injective. Considérer

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{[a_n,+\infty[}(x)}{2^n} \end{array}\right.$$

2. Notons $\Delta = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $n \mapsto b_n$ injective. Considérer

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{[a_n,+\infty[}(x)}{2^n} x \end{array}\right.$$

□

Exercice 16.7. Soit (X, d) un espace métrique qui n'est pas compact.
Montrer qu'il existe $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et non bornée.

Solution. Soit $u \in \mathrm{X}^{\mathbb{N}}$ sans valeur d'adhérence. Par conséquent, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini. Soit v extraite de u et injective.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Construisons ρ_n tel que

$$\mathrm{B}_f(v_n, \rho_n) \bigcap \{v_k \mid k \geq n+1\} = \varnothing$$

Comme $\Lambda(v) = \varnothing$, on a $v_n \notin \Lambda(v)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall\, n \geq \mathrm{N}, \quad \mathrm{B}(v_n, \varepsilon) \bigcap \{v_k \mid k \geq \mathrm{N}\} = \varnothing.$$

L'ensemble

$$\mathrm{F} = \mathrm{B}(v_n, \varepsilon) \bigcap \{v_k \mid k \geq n+1\}$$

est fini et la suite est injective.

Soit $\eta > 0$ tel que

$$\mathrm{B}(v_n, \eta) \bigcap \mathrm{F} = \varnothing$$

On pose finalement

$$\rho_n = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\eta}{2}, \frac{1}{n}\right)$$

et on a

$$\mathrm{B}_f(v_n, \rho_n) \bigcap \{v_k \mid k \geq n+1\} = \varnothing.$$

Considérons à présent la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \geq 0$ par

$$r_n = \min(\rho_0, ..., \rho_n).$$

Cette suite est décroissante, et

$$p \neq q \;\Rightarrow\; \mathrm{B}\left(v_p, \frac{r_p}{3}\right) \bigcap \mathrm{B}\left(v_q, \frac{r_q}{3}\right) = \varnothing$$

puisqu'on a construit $(\rho_n)_{n\geq 0}$ de telle sorte que $d(v_p, v_q) \geq r_p$ pour tout $p < q$.

On pose

$$u_p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \max\left(0, p\left(1 - \frac{3d(x, v_p)}{r_p}\right)\right) \end{array} \right.$$

qui est continue, vérifie $u_p(v_p) = p$ et est nulle à l'extérieur de $\mathrm{B}\left(v_p, \frac{r_p}{3}\right)$. On considère alors

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} u_p(x) \end{array} \right.$$

Comme

$$\forall\, x \in \mathrm{X}, \quad \exists\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{B}(x, \varepsilon) \bigcap \{v_n \mid n \geq \mathrm{N}\} = \varnothing$$

la suite $u_p(x)$ stationne en zéro et $s(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathrm{X}$.

Soit $\omega \in \mathrm{X}$. Soient $\varepsilon_0 > 0$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{B}\left(x, \frac{\varepsilon_0}{10}\right) \bigcap \{v_n \mid n \geq \mathrm{N}\} = \varnothing$. La restriction de s à $\mathrm{B}\left(x, \frac{\varepsilon_0}{10}\right)$ est une somme finie, elle est donc continue.

$$\boxed{s \text{ est continue et non bornée}}$$

$\square$

Exercice 16.8 (*Calme bloc ici-bas chu d'un désastre obscur*[a]). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2-périodique et telle que

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = x^2.$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2|x|.$$

a. ou *Un jour à l'X*

<u>*Solution*</u>. On note φ la somme en question.

Première étape : montrons que φ est bien définie et continue. Pour cela montrons que la convergence est normale sur $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ avec $\mathrm{M} > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\mathrm{M}}{2^{n_0}} < \frac{1}{2}$. Soit $x \in [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Pour $n \geq n_0$,

$$\left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x}{2^n} < \frac{\mathrm{M}}{2^n}$$

et $\sum_{n \geq n_0} \frac{\mathrm{M}}{2^n}$ converge.
Pour $n < n_0$,

$$\left|2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| < \frac{1}{4 \times 2^{-n}}$$

et $\sum_{n \leq n_0 - 1} \frac{1}{4 \times 2^{-n}}$ converge. φ est donc bien définie en x, et la convergence est normale sur $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Chaque terme de la série est continu, donc $\boxed{\varphi \text{ est continue.}}$

Deuxième étape : montrons l'identité. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(2x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = 2\varphi(x)$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{\varphi(2x)}{2x}.$$

Soit $x \in [0,1]$. De la 2-périodicité de f, on tire

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) - \varphi(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n \left(f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(f\left(\frac{x+1}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{(x+1)^2}{2^{2n}} - \frac{x^2}{2^{2n}}\right) + (x-1)^2 - x^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x+1}{2^n} + 1 - 2x \\
&= 2x + 1 - 1 - 2x \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(x+1) - \varphi(x) = 2.$$

On note par ailleurs que $\varphi(0) = 0$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq 2^n$.

$$\varphi\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)$$

Si $k \leq 2^{n-1}$,

$$\varphi\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\frac{k}{2^{n-1}} \times 2 = 2\frac{k}{2^n}.$$

Si $2^n \geq k > 2^{n-1}$, en posant $k' = k - 2^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{k}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(1 + \frac{k - 2^{n-1}}{2^{n-1}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{k'}{2^{n-1}}\right) + 2\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 2\left(\frac{k'}{2^{n-1}} + 1\right) = 2\frac{k}{2^n}\end{aligned}$$

Par continuité de φ et densité des nombres di-adiques dans $[0,1]$, on en déduit

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \varphi(x) = 2|x|$$

On étend facilement ce résultat à tout $\mathbb{R}$ à l'aide de la dernière identité démontrée.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2|x|}$$

□

Exercice 16.9. Soit

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln n}{1 + xn^2} \end{cases}$$

1. Justifier l'existence de φ.
2. Étudier la continuité de φ.
3. Donner la limite puis un équivalent de $\varphi(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
4. Donner un équivalent de $\varphi(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Solution. **1.** $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

$$\frac{\sqrt{x}\ln n}{1 + xn^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

donc $\varphi(x)$ bien définie.

2. Considérons pour $n \geq 2$ la fonction

$$\alpha_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sqrt{x}}{1+xn^2} \end{cases}$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\begin{aligned}\alpha_n'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + xn^2) - x\sqrt{x}n^2}{(1 + xn^2)^2} \\ &= \frac{1 - n^2 x}{2\sqrt{x}(1 + xn^2)^2}\end{aligned}$$

La dérivée de α_n s'annule donc en $\frac{1}{n^2}$ ce qui fournit après étude

$$\|\alpha_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$$

ce qui est insuffisant pour conclure. Soit $a > 0$. On se donne $n_0 \geq \frac{1}{a}$ et on considère pour $n \geq n_0$:

$$v_n : \left\{ \begin{array}{rcl}]a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sqrt{x}\ln n}{1+xn^2} \end{array} \right.$$

qui vérifie

$$\|v_n\|_\infty = u_n(a)\ln n$$

et on alors

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \|v_n\|_\infty < +\infty$$

ce qui permet cette fois-ci d'affirmer que $\varphi_{|]a,+\infty[}$ est continue. Avec $a \to 0$ on obtient $\boxed{\varphi \text{ continue.}}$

3. Soit $x \geq 1$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln n}{1+xn^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cherchons à présent un équivalent en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N} \geq 3$, tel que

$$\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors, pour x assez grand,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\ln n}{n^2} \geq \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x\ln n}{1+xn^2} \geq \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\ln n}{n} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^2}$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\ln n}{n^2} \geq \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x\ln n}{1+xn^2} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\boxed{\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}}$$

Autre méthode : $\left|\varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2(1+xn^2)}$ et utiliser convergence normale et théorème de la double limite.

4. La fonction en n dans la somme n'est pas monotone mais on tente quand même une comparaison avec une intégrale :

$$\mathrm{B}(x) = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln y \mathrm{d}y}{1+xy^2}$$

On en cherche un équivalent en 0^+.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(x) &= \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\ln y \mathrm{d}y}{1+xy^2} = \int_1^\infty \frac{\ln y \mathrm{d}\sqrt{x}y}{1+xy^2} = \int_{\sqrt{x}}^\infty \frac{\ln v - \frac{1}{2}\ln x}{1+v^2}\mathrm{d}v \\
&= \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^\infty \frac{\ln v}{1+v^2}\mathrm{d}v}_{\mathrm{A}+o(1)} - \frac{1}{2}\ln x\,[\arctan v]_{\sqrt{x}}^\infty \\
&= -\frac{1}{2}\ln x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})\right) + \mathrm{A} + o(1) \\
&= -\frac{\pi}{4}\ln x + \mathrm{A} + o(1)
\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{B}(x) \underset{0^+}{\sim} -\frac{\pi}{4}\ln x.$$

Pour conclure,

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \mathrm{B}(x)| &= \left|\sum_{n=2}^\infty \left(\frac{\sqrt{x}\ln n}{1+n^2x} - \int_{n-1}^n \frac{\sqrt{x}\ln y \mathrm{d}y}{1+xy^2}\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=2}^\infty \int_{n-1}^n \left|\int_{n-1}^n \frac{\sqrt{x}\ln y}{1+xy^2} - \frac{\sqrt{x}\ln n}{1+n^2x}\right|\mathrm{d}y \\
&\leq \sum_{n=2}^\infty \left(\left|\frac{\sqrt{x}\ln n}{1+(n-1)^2x} - \frac{\sqrt{x}\ln n}{1+n^2x}\right| + \left|\frac{\sqrt{x}\ln(n-1)}{1+n^2x} - \frac{\sqrt{x}\ln n}{1+n^2x}\right|\right) \\
&= o(\ln x)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\varphi(x) \underset{0^+}{\sim} -\frac{\pi}{4}\ln x}$$

□

Exercice 16.10. Soit $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1. Déterminer une fonction $g : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que :

$$\forall\, z \in \mathrm{D}, \quad g\left(z^2\right) - g(z) = \frac{z}{z^2-1}.$$

2. Déterminer les fonctions $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telles que :

$$\forall\, z \in \mathrm{D}, \quad f(z) = f\left(z^2\right).$$

3. Calculer pour $z \in \mathrm{D}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}}.$$

Solution. **1.** On pose $g(z) = \frac{\mathrm{A}}{z-1}$ pour $z \in \mathrm{D}$, avec $\mathrm{A} \in \mathbb{C}$ restant à déterminer.

$$g(z^2) - g(z) = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{A}(z+1)}{z^2-1} = -\frac{\mathrm{A}z}{z^2-1}$$

donc en posant $\mathrm{A} = -1$,

$$\boxed{g : z \longmapsto -\frac{1}{z-1} \text{ convient}}$$

2. Soit $f : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall\, z \in \mathrm{D}, \quad f(z) = f\left(z^2\right).$$

Soit $z \in \mathrm{D}$. De là,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(z) = f\left(z^{2^n}\right).$$

or $f\left(z^{2^n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$. Donc $\boxed{f \text{ est constante.}}$

3. Soit $z \in \mathrm{D}$.

$$\left|\frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}}\right| \leq \frac{|z|^{2^{n-1}}}{1-|z|^{2^n}} \sim |z|^{2^{n-1}}$$

et $\sum |z|^{2^{n-1}}$ converge. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}}$ converge absolument donc converge.

Montrons que $h : z \in \mathrm{D} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}}$ vérifie l'équation fonctionnelle et qu'elle est continue. Soit $z \in \mathrm{D}$.

$$h(z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}} = h(z) - \frac{z}{1-z^2}$$

Reste la continuité. Soit $r \in]0,1[$. On se restreint à $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{O}, r)$.

$$\underbrace{\left|\frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}}\right|}_{u_n(z)} \leq \frac{|z|^{2^{n-1}}}{1-|z|^{2^n}} \leq \frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}$$

d'où $\|u_n\|_\infty \leq \frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}$ et donc $\sum \|u_n\|_\infty$ converge. On a prouvé la convergence normale de $\sum u_n$ sur $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{O}, r)$. De là (...) h est continue sur D.
Il existe donc une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall\, z \in \mathrm{D}, \quad h(z) = \frac{z}{1-z} + \mathrm{C}$$

mais $h(0) = 0$ donc $\mathrm{C} = 0$. Finalement

$$\boxed{\forall\, z \in \mathrm{D}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}} = \frac{z}{1-z}}$$

On peut également prouver ce résultat à l'aide des familles sommables.

$\square$

Exercice 16.11. *Suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ convergeant simplement mais dont la convergence n'est uniforme sur aucun intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.*

1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^2}{1+x^4} \in \mathbb{R}$. Représenter rapidement f.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(nx) \in \mathbb{R}$ et on range les rationnels dans une suite $(r_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - r_p) \end{array} \right.$$

Montrer que φ_n est bien définie et qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$.

3. Montrer que $\varphi_n \to 0$ simplement.

4. Vérifier que $\varphi_n\left(r_p + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2^{p+1}}$. En déduire le résultat annoncé.

Exercice 16.12 (Séries de Dirichlet)**.** Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n e^{-\lambda_n z} \end{array} \right.$$

On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum u_n(z_0)$ converge. Soit $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur

$$\mathrm{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - z_0) \leq \varphi\}.$$

Solution. Deux remarques préliminaires qui permettent déjà de simplifier le problème :

— on peut supposer $z_0 = 0$ quitte à remplacer a_n par $a_n e^{-\lambda_n z_0}$;
— cela fait, on peut supposer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$ quitte à changer a_0.

À présent, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

et on se donne $z \in \mathrm{E}$ avec $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $|\theta| \leq \varphi$.

Soient $0 \leq \mathrm{N} \leq \mathrm{P}$ des entiers.

$$\begin{aligned} \sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}} a_n e^{-\lambda_n z} &= \sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}} (\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}) e^{-\lambda_n z} \\ &= \sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}} \mathrm{A}_n e^{-\lambda_n z} - \sum_{n=\mathrm{N}-1}^{\mathrm{P}-1} \mathrm{A}_n e^{-\lambda_{n+1} z} \\ &= \sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}-1} \mathrm{A}_n (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}) + \mathrm{A}_\mathrm{P} e^{-\lambda_\mathrm{P} z} - \mathrm{A}_{\mathrm{N}-1} e^{-\lambda_\mathrm{N} z} \end{aligned}$$

D'où

$$\left|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}} a_n e^{-\lambda_n z}\right| \leq \sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}-1} |\mathrm{A}_n| \left|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}\right| + |\mathrm{A}_\mathrm{P}| \left|e^{-\lambda_\mathrm{P} z}\right| + |\mathrm{A}_{\mathrm{N}-1}| \left|e^{-\lambda_\mathrm{N} z}\right|$$
$$\leq \sup_{n\geq \mathrm{N}-1} |\mathrm{A}_n| \left(\sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}-1} \left|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}\right| + \left|e^{-\lambda_\mathrm{P} z}\right| + \left|e^{-\lambda_\mathrm{N} z}\right|\right)$$

Or pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| &= \left|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} z e^{-tz} \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \rho \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-t\Re(z)} \mathrm{d}t \\
&\leq \rho \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-t\rho\cos\theta} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ce qui fournit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}-1} |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| &\leq \rho \int_{\lambda_\mathrm{N}}^{\lambda_\mathrm{P}} e^{-t\rho\cos\theta} \mathrm{d}t \\
&\leq \rho \int_{\lambda_\mathrm{N}}^{\lambda_\mathrm{P}} e^{-t\rho\cos\varphi} \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{\cos\varphi}\left(e^{-\lambda_\mathrm{N}\rho\cos\varphi} - e^{-\lambda_\mathrm{P}\rho\cos\varphi}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\left|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}} a_n e^{-\lambda_n z}\right| \leq \sup_{n\geq \mathrm{N}-1} |\mathrm{A}_n| \left(\frac{1}{\cos\varphi} \underbrace{\left(e^{-\lambda_\mathrm{N}\rho\cos\varphi} - e^{-\lambda_\mathrm{P}\rho\cos\varphi}\right)}_{\leq 1} + 2\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mathrm{N}' \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \mathrm{N}' - 1 \Rightarrow |\mathrm{A}_n| \leq \frac{\varepsilon}{\frac{1}{\cos\varphi} + 2}.$$

Pour $\mathrm{N}' \leq \mathrm{N} \leq \mathrm{P}$ on a bien

$$\left|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\mathrm{P}} a_n e^{-\lambda_n z}\right| \leq \varepsilon$$

et ceci indépendamment de z. En incluant le cas $z = 0$, on conclut

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge uniformément sur E.}}$$

$\square$

Chapitre 17

Séries entières

Exercice 17.1. Donner les rayons et domaines de convergence des séries entières suivantes :

$$1)\ \sum_{n\geq 0} n!z^n \qquad 2)\ \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad 3)\ \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \qquad 4)\ \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2} \qquad 5)\ \sum_{n\geq 1} z^n 6)\ \sum_{n\geq 1} n^n z^{n!}$$

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} \geq 0$. Donner les rayons de convergence des séries

$$1)\ \sum_{n\geq 0} a_n z^{2n} \qquad 2)\ \sum_{n\geq 0} a_n z^{2^n}$$

Exercice 17.2 (Principe des zéros isolés)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, dont on note f la somme. On suppose qu'existe $(u_p) \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

(1) $u \to 0$

(2) $\forall p \in \mathbb{N} \quad f(u_p) = 0$

(3) $\forall p \in \mathbb{N} \quad u_p \neq 0$

Montrer $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0$.

Solution. En notant N le plus petit indice tel que $a_{\mathrm{N}} \neq 0$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$a_{\mathrm{N}} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{N}+n} u_p^n$$

ce qui fournit la contradiction souhaitée en faisant tendre p vers l'infini : la somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence. □

Exercice 17.3. Montrer qu'une fraction rationnelle ne possédant pas de pôle nul est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 17.4. Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps [a] de $\mathbb{C}$. Montrer qu'une fraction rationnelle de $\mathbb{K}(\mathrm{X})$ ne possédant pas de pôle nul est développable en série entière au voisinage de zéro et que ses coefficients sont dans $\mathbb{K}$.

a. Exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(e)$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$...

Exercice 17.5. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Donner un développement asymptotique de

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1,1[& \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (1+x)^\alpha \end{array} \right.$$

Solution. On identifier φ comme solution DSE d'un problème. Ici, φ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} f :]-1,1[\rightarrow \mathbb{C} \text{ dérivable} \\ f(0) = 1 \\ \forall x \in]-1,1[\quad f'(x) = \dfrac{\alpha f(x)}{1+x} \end{array} \right.$$

On cherche ensuite une relation de récurrence sur les coefficients de la série entière. On posera alors

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

puis on vérifiera que la somme de $\sum a_n x^n$ convient. L'unicité de la solution au problème plus haut fournit l'égalité entre φ et cette somme. $\square$

Exercice 17.6 (Théorème de la limite radiale)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, et $z_0 \in \Gamma(0, \mathrm{R})$. On note $f : \mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ sa somme et on suppose que $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in [0, z_0[}} f(z)$ existe et vaut $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$.

Exercice 17.7 (Théorème d'Abel)**.** Soit $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1.

On note $f :]-1,1[\rightarrow \mathbb{C}$ sa somme et on suppose que $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ converge.

Montrer que $\lim\limits_{t \to 1} f(z)$ existe et vaut $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Solution. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_n$$

et on fixe $x \in [0,1[$.

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (r_n - r_{n+1}) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+1} x^n \\ &= r_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n (x^n - x^{n-1}) \end{aligned}$$

d'où

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - f(x)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} r_n(x^{n-1} - x^n)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |r_n|(x^{n-1} - x^n)$$

Première conclusion :

$$\forall x \in\ [0,1[\quad \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^* \quad \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - f(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |r_n|(x^{n-1} - x^n) + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} |r_n|(x^{n-1} - x^n)$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq \mathrm{N} + 1 \Rightarrow |r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $\eta \in]0,1[$ tel que

$$|1 - x| \leq \eta \Rightarrow \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |r_n|(x^{n-1} - x^n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $x \in]1-\eta, 1[$. On obtient

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration. □

Exercice 17.8 (Théorème d'inversion)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. On note $f : \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \to \mathbb{C}$ sa somme.
Montrer

$$f(0) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists r \in]0,\mathrm{R}] \quad \exists b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad \forall z \in \mathrm{B}(0,r) \quad f(z) \neq 0 \ \text{ et } \ \frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

<u>*Solution*</u>.
Condition nécessaire. On suppose que $f(0) \neq 0$. Considérons la suite (b_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} b_0 & = & 1 \\ b_n & = & -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k} \quad \forall n \geq 1 \end{array}\right.$$

L'usage de la méthode des séries majorantes permet de montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est strictement positif. Soit $r \in]0,\mathrm{R}[$. La suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par un $\mathrm{M} > 0$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_0 & = & 1 \\ c_n & = & \mathrm{M}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{r^{n-k}} \quad \forall n \geq 1 \end{array}\right.$$

D'où l'on déduit $c_n = (\mathrm{M} + r)^n$. Cette suite majore b_n. Le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ est $\frac{1}{\mathrm{M}+r} > 0$. Si $z \in \mathrm{B}(0, \frac{1}{\mathrm{M}+r})$ alors, par domination, la série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est absolument convergente. Or, il se trouve que pour z de module assez petit, $1 = f(z)\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Cela achève la démonstration (il suffit de développer l'égalité précédente).
Condition suffisante. On suppose la condition réalisée. Alors, il est clair que $f(0) \neq 0$. □

Remarque 17.8.1. La démonstration peut paraître plus claire avec le lemme suivant :

Lemme 17.8.1. *Une série entière* $\sum u_n z^n$ *a un rayon de convergence non nul si et seulement s'il existe* $q > 0$ *tel que* $|u_n| \leq q^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17.9 (Théorème global)**.** Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de converge $\mathrm{R} > 0$, dont on note $f : \mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \to \mathbb{C}$ la somme. Soit $\omega \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R})$.
Montrer que la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{B}(0, \mathrm{R} - |\omega|) & \to & \mathbb{C} \\ h & \mapsto & f(\omega + h) \end{array} \right.$$

est la somme d'une série entière.

<u>*Solution*</u>. Soit $h \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R} - |\omega|)$.

$$|\omega + h| \leq |\omega| + |h| \leq \mathrm{R}$$

donc il est licite d'écrire ce qui suit.

$$g(h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (h+\omega)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^{n-k} h^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^{n-k} h^k a_n$$

On vérifie en remontant les calculs que la famille $(u(n,k))_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par

$$u(n,k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \omega^{n-k} h^k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est sommable (car une série entière est absolument convergente sur le disque ouvert de convergence). On peut alors permuter les signes somme et on obtient :

$$g(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{n+k}{k} \omega^n \right)}_{b_k} h^k$$

□

Exercice 17.10 (Théorème de composition)**.** Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ une série entière de somme f nulle en zéro, et de rayon de convergence $\mathrm{R} >$. Soit $\sum_{n\geq 0}^{\infty} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R}' > 0$ et de somme g. Soit $r \in]0, \mathrm{R}[$ tel que $z \in \mathrm{B}(0,r) \Rightarrow f(z) \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R}')$.
Montrer que

$$h : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{B}(0, r) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & g \circ f(z) \end{array} \right.$$

est développable en série entière au voisinage de zéro.

<u>*Solution*</u>. Soit $z \in \mathrm{B}(0, r)$.

$$g \circ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n f(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j \right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{p=n}^{\infty} \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}^* \\ \sum j_i = p}} a_{j_1} \ldots a_{j_n} z^p \right)$$

((∗) : Produit de Cauchy.) Majorons les $|a_j|$. $(a_j r^j)$ est bornée. Ainsi $|a_j| \leq \mathrm{M}r^{-j}$ où $\mathrm{M} > 0$.

$$u(n,p) = \begin{cases} b_n \left(\displaystyle\sum_{\substack{j_1,\dots,j_n \in \mathbb{N}^* \\ \sum j_i = p}} a_{j_1} \dots a_{j_n} z^p \right) & \text{si } p \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La famille $(u(n,p))_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} |u(n,p)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \left(\sum_{p=n}^{\infty} \sum_{\substack{j_1,\dots,j_n \in \mathbb{N}^* \\ \sum j_i = p}} \mathrm{M}^n r^{-p} |z|^p \right) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \sum_{p=n}^{\infty} \mathrm{M}^n r^{-p} |z|^p \left(\sum_{\substack{j_1,\dots,j_n \in \mathbb{N}^* \\ \sum j_i = p}} 1 \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \mathrm{M}^n \left(\frac{\frac{|z|}{r}}{1 - \frac{|z|}{r}} \right)^n < +\infty$$

Ainsi $|z| < r \Rightarrow \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} |u(n,p)| < +\infty$. Cela achève la démonstration en permutant les signes sommes.

□

Exercice 17.11 (Formules de Cauchy)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$, dont on note $f : \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \to \mathbb{C}$ la somme. Montrer que pour tout $r \in]0,\mathrm{R}[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$$

Exercice 17.12. Soit $\lambda \in]-1,1[$. Montrer que les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation de retard :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda x)$$

sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et les expliciter.

Exercice 17.13. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x \leq e^{\frac{x^2}{2}}$$

Exercice 17.14. Montrer que $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{e^z} \in \mathbb{C}$ est développable en séries entières.

Exercice 17.15. Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$. Montrer que

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh}(a^n x) \end{cases}$$

est développable en séries entières et calculer son développement.

Solution. La théorie des familles sommables permet de montrer que φ est DSE sans en calculer la somme. On s'intéresse alors au problème fonctionnel suivant. On cherche $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $y(0) = 0$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad y(x) - y(ax) = \operatorname{sh} x$$

En fait, φ est une solution, et c'est la seule (on le montre par récurrence en partant d'une solution). $\square$

Exercice 17.16. Soit $\mathrm{R} > 0$. Montrer que les fonctions polynômiales sont denses dans l'algèbre des fonctions continues de $\overline{\mathrm{B}}(0, \mathrm{R})$ dans $\mathbb{C}$ qui sont somme d'une série entière sur $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$.

Exercice 17.17. Soit $\mathrm{R} > 0$. Montrer que l'algèbre des fonctions continues de $\overline{\mathrm{B}}(0, \mathrm{R})$ dans $\mathbb{C}$ qui sont somme d'une série entière sur $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ est une algèbre de Banach.

Exercice 17.18. Soit Φ la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n \frac{z^n}{n!}$ est infini.

2. On note φ la somme de $\sum a_n \frac{z^n}{n!}$. Montrer

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < \mathrm{R} \qquad \Phi(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(zx) e^{-x} \mathrm{d}x$$

Solution. **1.** Soit $r_0 \in]0, \mathrm{R}[$ et $r > 0$ quelconque. $a_n r^n / n! = a_n r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n / n!$ donc $a_n r^n / n!$ est bornée.

2. Soit $z \in \mathrm{B}_o(0, \mathrm{R})$ et $r_0 \in]|z|, \mathrm{R}[$. Soit M un majorant de $(|a_n| r_0^n)$. On note $q = \frac{|z|}{r_0}$.

$$\left| \frac{a_n z^n x^n}{n!} \right| \leq \mathrm{M} \frac{q^n x^n}{n!}$$

d'où pour $\mathrm{N} \geq 0$

$$\left| \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n \frac{(zx)^n}{n!} \right| \leq \mathrm{M} e^{(q-1)x}$$

et notamment $|\varphi(zx)| \leq \mathrm{M} e^{(q-1)x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Finalement l'intégrale est bien définie et les hypothèses du théorème de domination sont satisfaites. On permute à bon droit les signes $\sum$ et $\int$, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \varphi(zx) e^{-x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \underbrace{\Gamma(n+1)}_{n!} = \Phi(z)$$

$\square$

Exercice 17.19. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle positive à partir d'un certain rang et ne stationnant pas en 0. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est infini. Soit $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$b_n = o(a_n) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Les sommes A et B respectivement des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathrm{B}(x) = o(\mathrm{A}(x)) \text{ quand } x \to +\infty.$$

Chapitre 18

Fonctions analytiques

Exercice 18.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N} \quad |f^{(k)}(t)| \leq \mathrm{C}n!$$

Montrer que si

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(a) = 0$$

alors f est nulle.

Exercice 18.2 (Critère d'analyticité de Pringsheim)**.** Soit $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{C}$ (où $\alpha > 0$) une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Prouver l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) il existe $\beta \in]0, \alpha[$ tel que :

$$\forall x \in]-\beta, \beta[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!} x^n$$

(ii) il existe $\gamma \in]0, \alpha], \mathrm{K} > 0$ et $\mathrm{A} > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]-\gamma, \gamma[\quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq \mathrm{K} n! \mathrm{A}^n$$

Exercice 18.3 (Représentation intégrale de Cauchy)**.** On fixe $\mathrm{R} > 0$.

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que pour

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} re^{it} \mathrm{d}t$$

2. Soit f une fonction continue sur $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ vérifiant pour $|z| < r < \mathrm{R}$ l'égalité précédente. Montrer que f est la somme d'une série entière sur $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$.

Exercice 18.4 (Théorème de Bernstein sur les applications absolument monotones)**.** Soient $\alpha > 0$ et $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad f^{(n)}(x) \geq 0$$

Montrer que f est somme de sa série de Taylor sur $[-\alpha, \alpha[$. *Indication :* on pourra montrer que si $0 \leq x \leq a < \alpha$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(at)\mathrm{d}t$$

puis en déduire

$$x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt)\mathrm{d}t \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} f(a)$$

Exemple : Appliquer le résultat à la fonction tan.

Chapitre 19

Intégrale sur un segment

Exercice 19.1 (Théorème du relèvement continu)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ on vide et non réduit à un point. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ telle que

(i) f est $\mathcal{C}^1$

(ii) $f(\mathrm{I}) \subset \mathbb{U}$

Montrer qu'il existe $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = e^{i\alpha(t)}$$

Solution. Pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$1 = f(t)\overline{f(t)}$$

Donc

$$0 = f'(t)f(t) + f(t)\overline{f'(t)} = f'(t)\overline{f(t)} + \overline{f'(t)\overline{f(t)}}$$

Par conséquent, $\Re(f'(t)\overline{f(t)}) = 0$ et $\boxed{f'(t)\overline{f(t)} \in i\mathbb{R}.}$

Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ fixé. On choisit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = e^{i\theta}$. Considérons

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{I} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \theta_0 - \displaystyle\int_{t_0}^{t} if'(\tau)\overline{f(\tau)}\mathrm{d}\tau \end{array} \right.$$

α est $\mathcal{C}^1$ et bien définie. Montrons que

$$g : t \mapsto f(t)e^{-\alpha(t)}$$

est constante égale à 1. On a $g(t_0) = 1$. Pour $t \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t)e^{-i\alpha(t)} - i\alpha'(t)f(t)e^{-i\alpha(t)} \\ &= (f'(t) - i\alpha'(t)f(t))e^{-i\alpha(t)} \\ &= \underbrace{(f'(t) - if(t)(-if'(t)\overline{f(t)})}_{f'(t)-f'(t)} e^{-i\alpha(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $g(t) = 1$ pour tout $t \in \mathrm{I}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathrm{I}, \quad f(t) = e^{i\alpha(t)}}$$

□

Exercice 19.2 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer

$$\int_a^b f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve «de poche» dans le cas $\mathcal{C}^1$?

Solution. On le prouve pour les fonctions indicatrices de segments, puis pour les fonctions en escalier, et on étend par densité aux fonctions continues par morceaux : soient $\varepsilon > 0$ et φ en escalier telle que $\|f - \varphi\| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_a^b (f(t) - \varphi(t))e^{ixt}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{ixt}\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi(t)e^{ixt}\mathrm{d}t\right| \le \varepsilon$$

pour x assez grand.

Dans le cas $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties donne le résultat. □

Exercice 19.3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, telle que $\int_0^1 f = 0$. On pose $\mathrm{A} = -\inf f$ et $\mathrm{B} = \sup f$.

1. Montrer
$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t \le \mathrm{AB}$$

2. Cas d'égalité ?

Solution. **1.** $-\mathrm{A} \le f \le \mathrm{B}$ donc $(\mathrm{B} - f) \ge 0$ et $(f + \mathrm{A}) \ge 0$. D'où $(\mathrm{B} - f)(f + \mathrm{A}) \ge 0$ et $\mathrm{BA} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})f \ge f^2$, ce qui finalement fournit en intégrant $\mathrm{BA} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})\int_0^1 f \ge \int_0^1 f^2$ et donc
$$\boxed{\int_0^1 f^2 \le \mathrm{AB}}$$

2. On suppose $\mathrm{A}, \mathrm{B} > 0$. On définit f par $f(t) = -\mathrm{A}$ si $t \in [0, t_0]$ et $f(t) = \mathrm{B}$ si $t \in]t_0, 1]$ où t_0 vérifie $-t_0\mathrm{A} + (1 - t_0)\mathrm{B} = -\mathrm{AB}$ c'est-à-dire $t_0 = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} \in]0,1[$.

□

Exercice 19.4. Soient $a < b$ des réels.

1. Montrer
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{C} > 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}) \quad \forall\, x \in [a,b] \qquad \left|f^2(x) - f^2(a)\right| \le \mathrm{C}\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2$$

2. Montrer
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{D} > 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}) \qquad \sup_{x\in[a,b]} f^2(x) \le \mathrm{D}\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2$$

Solution. **1.** Soient $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et $x \in [a,b]$. On écrit pour commencer

$$|f^2(x) - f^2(a)| = \left| \int_a^x 2f'(t)f(t)\mathrm{d}t \right| \leq 2\int_a^b |f'(t)||f(t)|\mathrm{d}t$$

or pour $t \in [a,b]$,

$$2|f'(t)||f(t)| = 2\sqrt{\varepsilon}|f'(t)|\frac{|f(t)|}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{f^2(t)}{\varepsilon} + \varepsilon f'^2(t)$$

ce qui fournit

$$\boxed{\left|f^2(x) - f^2(a)\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2}$$

2. Soit $x \in [a,b]$. Pour tout $t \in [a,b]$,

$$f^2(x) = f^2(t) + \int_t^x 2f(u)f'(u)$$

d'où

$$f^2(x) \leq f^2(t) + \int_a^b 2|f(u)||f'(u)|\mathrm{d}u$$

ce qui fournit en intégrant entre a et b

$$(b-a)f^2x \leq \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t + (b-a)\int_a^b \underbrace{2|f'(u)||f(u)|}_{\leq \frac{f^2(u)}{\varepsilon} + \varepsilon f'^2(u)}\mathrm{d}u$$

et finalement

$$\boxed{\sup_{x\in[a,b]} f^2(x) \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{b-a}\right)\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2}$$

$\square$

Exercice 19.5. Calculer la valeur moyenne de $\theta \mapsto \frac{1}{1+2\cos^2\theta}$, c'est-à-dire

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+2\cos^2\theta}$$

Solution. La fonction $\theta \mapsto \frac{1}{1+2\cos^2\theta}$ est π-périodique (et c'est là la seule difficulté), donc pour effectuer correctement un changement de variable, on calcule plutôt

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+2\cos^2\theta} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+2\cos^2\theta} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} \qquad (t = \tan\theta) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+2\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

□

Exercice 19.6. Calculer

$$\mathrm{I}=\int_0^4\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Solution.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\int_2^6\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)y(y+1)}=\int_2^6\frac{y\mathrm{d}y}{(y^2-1)y^2}=\frac{1}{2}\int_2^6\frac{dy^2}{(y^2-1)y^2}\\&=\frac{1}{2}\int_4^{36}\frac{\mathrm{d}u}{(u-1)u}=\frac{1}{2}\int_4^{36}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{u-1}{u}\right)\right]_4^{36}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{35}{27}\right)\end{aligned}$$

□

Exercice 19.7. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que g est convexe si et seulement si pour tout fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux on a :

$$g\left(\int_0^1 f\right)\leq\int_0^1 g\circ f$$

Exercice 19.8 (Inégalité de Van der Corput)**.** Montrer qu'il existe une suite $(c_k)_{k\geq1}\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$ telle que

(i) pour tout $a<b$, tout $\varphi\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $|\varphi'|\geq1$ et φ' monotone, et tout $\lambda>0$

$$\left|\int_a^b e^{i\varphi(x)}\mathrm{d}x\right|\leq\frac{c_1}{\lambda}$$

(ii) pour tout $a<b$, tout $k\in\mathbb{N}^*$, $k\geq2$, tout $\varphi\in\mathcal{C}^{k+1}([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $|\varphi^{(k)}|\geq1$ et tout $\lambda>0$

$$\left|\int_a^b e^{i\varphi(x)}\mathrm{d}x\right|\leq\frac{c_k}{\lambda^{1/k}}$$

Exercice 19.9. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad\int_x^y f(t)\mathrm{d}t=(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Solution. On constate que les fonctions affines conviennent. Soit f vérifiant la propriété. On a en faisait un petit changement de variables et en excluant le cas trivial,

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall a>0\quad f(x)=\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t$$

On note F une primitive de f. Alors, en fixant $a > 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2a}(\mathrm{F}(x+a) - \mathrm{F}(x-a))$$

ce qui fournit notamment que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 4af(x) = \mathrm{F}(x+2a) - \mathrm{F}(x-2a) &= \mathrm{F}(x+2a) - \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x-2a) \\ &= 2af(x+2a) + 2af(x-2a) \end{aligned}$$

et on en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ on a

$$2f(x) = f(x+a) + f(x-a)$$

ce qui donne en fixant x et en dérivant par rapport à a

$$0 = f'(x+a) - f'(x-a)$$

et donc f' est constante, donc f est affine. □

Exercice 19.10 (Indice d'un lacet)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$.
Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} \in \mathbb{Z}$$

Comment peut-on interpréter cet entier ?

Solution. L'intégrale en question est bien définie, puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule par sur $\mathbb{R}$: $\frac{f'}{f}$ est définie et continue.

Considérons ϕ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\phi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\mathrm{d}\theta\right).$$

ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\phi'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}\phi(t)$. Donc ϕ, comme f, est solution de l'équation différentielle $y' - \frac{f'}{f}y = 0$, linéaire d'ordre 1, et donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\phi = cf$. Or f est 2π-périodique donc ϕ aussi et donc $\exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\mathrm{d}\theta\right) = \phi(2\pi) = \phi(0) = 1$ ce qui fournit bien $\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} \in 2i\pi\mathbb{Z}$. □

Chapitre 20

Intégrale généralisée

Exercice 20.1. Montrer que les fonctions continues à support compact sont denses dans $(\mathrm{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|.\|_1)$.

Solution. On définit u_n l'application affine par morceaux valant
- 1 sur $[-n,n]$;
- 0 sur $]-\infty,-n-1[\cup]n+1,+\infty[$.

Fixons $f\in\mathrm{L}^1$. Alors $fu_n\in\mathrm{L}^1$ et

$$\|f-u_n\|_1=\int_{\mathbb{R}}|f-u_nf|=\int_n^{+\infty}|f-u_nf|+\int_{-\infty}^{-n}|f-u_nf|\leq\int_n^{+\infty}|f|+\int_{-\infty}^{-n}|f|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

□

Exercice 20.2 (Continuité des translations)**.** Soit $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Déterminer

$$\lim_{\substack{h\to0\\ \neq}}\int_{\mathbb{R}}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\qquad\text{et}\qquad\lim_{h\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$$

Solution. Utiliser le théorème démontré dans l'exercice précédent : prouver le résultat pour les fonctions à support compact, puis étendre par densité. On obtient 0 et $2\|f\|_1$. □

Exercice 20.3. Soient $a<b$ des réels. Calculer

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

Solution.

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-(x^2-(b+a)x+ab)}}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2-\frac{(b-a)^2}{4}\right)}}$$

$$=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}-y^2}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta}=\pi$$

où l'avant-dernière égalité procède du changement de variable $y = \frac{b-a}{2}\sin\theta$.

$$\boxed{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi}$$

□

Exercice 20.4. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} uf$$

converge. Montrer que u est intégrable.

Solution. Considérons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{u(x)}{|u(x)|+e^{-x^2}} \end{array} \right.$$

qui est continue et vérifie $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)f(x)\mathrm{d}x$$

converge par hypothèse.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|u(x)| - u(x)f(x) = |u(x)| - \frac{|u(x)|^2}{|u(x)| + e^{-x^2}} = \frac{-e^{-x^2}|u(x)|}{|u(x)| + e^{-x^2}} := g(x)$$

Et donc $|u(x)| = u(x)f(x) + g(x)$. Par ailleurs,

$$|g(x)| = \frac{e^{-x^2}|u(x)|}{|u(x)| + e^{-x^2}} \leq e^{-x^2}$$

donc g est intégrable. Par conséquent, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la fonction $uf+g$ converge, donc $\int_{\mathbb{R}} |u|$ converge. $\boxed{u \text{ est intégrable.}}$ □

Exercice 20.5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} (\arctan(x+a) - \arctan(x))\mathrm{d}x.$$

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(a+x) - \arctan(x) \end{array} \right.$$

est continue, à valeurs positives. Au voisinage de $+\infty$, $\varphi(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et de même au voisinage de $-\infty$, ce qui assure son intégrabilité. Posons donc

$$\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}} (\arctan(x+a) - \arctan(x))\mathrm{d}x.$$

Soit $\mathrm{M} > 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} (\arctan(x+a) - \arctan(x))\mathrm{d}x &= \int_{-\mathrm{M}+a}^{\mathrm{M}+a} \arctan u\mathrm{d}u - \int_{-\mathrm{M}}^{\mathrm{M}} \arctan x\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\mathrm{M}}^{-\mathrm{M}+a} \arctan u\mathrm{d}u + \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}+a} \arctan u\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathrm{M}-a}^{\mathrm{M}+a} \arctan u\mathrm{d}u\end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{I} = \lim_{\mathrm{M}\to+\infty} \int_{\mathrm{M}-a}^{\mathrm{M}+a} \arctan u\mathrm{d}u$$

or $\lim\limits_{+\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2}$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{R}$ tels que

$$y \geq \mathrm{N} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \geq \arctan y \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

Soit $\mathrm{M} \geq \mathrm{N} + a$. En intégrant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$2a\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leq \int_{\mathrm{M}-a}^{\mathrm{M}+a} \arctan u\mathrm{d}u \leq a\pi$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{I} = a\pi}$$

□

Exercice 20.6 (Formule de Stirling). **1.** Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\mathrm{d}t = n!$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-n}^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n n!$$

3. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = 0$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-n}^{n} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

4. Retrouver ainsi la formule de Stirling.

1. n intégrations par parties donnent le résultat.

2. On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-1}^{+\infty} n(1+u)^n e^{-nu}\mathrm{d}u\\ &= \frac{ne^n}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} u^n e^{-nu}\mathrm{d}u\\ &= \frac{e^n}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{n}\right)^n\frac{e^{-v}}{n}\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n n!\end{aligned}$$

3. Le calcul est un peu plus subtil :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_1^{+\infty}(1+u)^n e^{-nu}\mathrm{d}u$$

Considérons $\varphi : u \mapsto (1+u)e^{-u}$. Cette fonction décroît sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(1) = 2e^{-1}$. Donc

$$u \geq 1 \Rightarrow \varphi(u)^n \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1}\varphi(u)$$

d'où l'on déduit

$$0 \leq \sqrt{n}\int_1^{+\infty}(1+u)^n e^{-nu}\mathrm{d}u \leq \sqrt{n}\left(\frac{2}{e}\right)^{n-1}\int_1^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La seconde limite fait appel à des dominations intéressantes, qui peuvent servir dans d'autres exercices.
Le changement de variable $v = \frac{t}{\sqrt{n}}$ fournit

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n}^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-v\sqrt{n}}\mathrm{d}v$$

ce qui invite à considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(v) = \begin{cases}\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-v\sqrt{n}} & \text{si } |v| < \sqrt{n}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On vérifie aisément que (f_n) converge simplement vers $v \mapsto e^{-\frac{v^2}{2}}$, dont on sait calculer l'intégrale (*cf* exercice 23.3). Il suffit donc de dominer la suite. Pour tout $x > -1$, la formule de Taylor avec reste intégral (ou une étude de fonction) fournit

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

ce qui, dans notre cas, permet d'écrire pour tout v dans $]-\sqrt{n}, \sqrt{n}[$

$$n\ln\left(1+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) - v\sqrt{n} \leq -\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3\sqrt{n}} \leq -\frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{3} \leq -\frac{v^2}{6}$$

On a donc une domination adéquate, qui permet de conclure.

4. On en déduit immédiatement, en combinant les différents résultats,

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}}$$

ce qui équivaut à la formule de Stirling.

Exercice 20.7 (Intégrale de Dirichlet)**.** **1.** Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\theta}$$

converge, sans converger absolument, et montrer que sa somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

2. Étudier

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$$

<u>*Solution*</u>. **1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \mathrm{d}t \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\int_0^{\to+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.
Soit $x > \pi$.

$$\begin{aligned}
\int_\pi^x \frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\theta} = -\int_\pi^x \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\theta} &= -\left[\frac{\cos\theta}{\theta}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\theta^2} \\
&= -\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^x \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\theta^2}
\end{aligned}$$

La dernière intégrale converge absolument, et $\frac{\cos x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta \text{ converge.}}$

Considérons :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t$$

qui est bien définie car $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \underset{0}{\sim} 2n+1$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_0 &= \frac{\pi}{2} \\
\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+2)t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n+1}\int_0^{(n+1)\pi} \cos u \,\mathrm{d}u = 0
\end{aligned}$$

et donc la suite (I_n) est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.
Considérons alors $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$. On constate qu'en 0, $\varphi(t) = -\frac{t}{6} + o(t)$ donc g est prolongeable par continuité en 0 et est même de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t}{t}\mathrm{d}t - \mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

mais on a comme par hasard

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$$

d'où on déduit

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}}$$

2. En intégrant par parties,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0 \infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

et faisant le changement de variable $u = \frac{t}{2}$, on obtient

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

□

Exercice 20.8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

1. Montrer que

$$\int_0^{\infty} f(t)\sin t\mathrm{d}t$$

converge.

2. Montrer que $t \mapsto f(t)\sin t$ est intégrable si et seulement si f l'est.

Solution. **1.** Supposer f de classe $\mathcal{C}^1$ permet de prouver le résultat à l'aide d'une intégration par parties. Nous faisons ici une preuve générale qui utilise le théorème de la moyenne.
On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{I}_n = \int_0^n f(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

et on dispose d'une suite $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de réels vérifiant $(k-1) \leq \zeta_k \leq k$ et

$$f(\zeta_k)\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin t\mathrm{d}t = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin t \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} 2(-1)^{k-1} f(\zeta_k)$$

or f est décroissante et de limite nulle en $+\infty$ donc la suite $(f(\zeta_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend en décroissant vers 0. Par conséquent (I_n) est la suite des sommes partielles d'une série alternée vérifiant le CSSA, donc converge.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour M assez grand,

$$\int_0^{\mathrm{M}} f(t)\sin t \mathrm{d}t = \int_0^{\pi\lfloor \frac{\mathrm{M}}{\pi} \rfloor} f(t)\sin t \mathrm{d}t + \underbrace{\int_{\pi\lfloor \frac{\mathrm{M}}{\pi} \rfloor}^{\mathrm{M}} f(t)\sin t \mathrm{d}t}_{|.|\leq \varepsilon}$$

et donc $\boxed{\int_0^{\infty} f(t)\sin t \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2. Condition nécessaire. On écrit

$$\int_0^{\infty} |f(t)\sin t| \,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(t)\sin t| \,\mathrm{d}t \geq 2\sum_{k=1}^{n} f(k\pi)$$

et donc $\sum_{n\geq 1} f(n\pi)$ converge. Pour tout n,

$$\int_0^{n\pi} |f| \leq \sum_{n=1}^{n} f((k-1)\pi)\pi$$

et donc f est intégrable.
Condition suffisante. C'est clair.

□

Exercice 20.9. Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{\infty} |f|$ converge. Montrer que f admet une limite nulle en $+\infty$.

Solution. On raisonne par l'absurde en se donnant $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid |f(x)| \geq \varepsilon_0$ est non majoré. On dispose notamment d'une suite (u_n) de réels vérifiant pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq n$ et $|f(u_n)| \geq \varepsilon_0$.

Soit $\eta > 0$ tel que pour tout $u, v \in \mathbb{R}$,

$$|u - v| \leq \eta \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

. On alors

$$\int_{u_n}^{u_n+\eta} |f(t)| \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

or pour $u_n \leq t \leq u_n + \eta$,

$$|f(t)| \geq |f(u_n)| - |f(u_n) - f(t)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

c'est absurde.

Donc f possède une limite nulle en $+\infty$. □

Exercice 20.10 (Inégalité de Hölder, inégalité de Minkowski)**.** Soient p, q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\mu > 0$. Montrer que

$$ab \leq \frac{(a\mu)^p}{p} + \frac{(b/\mu)^q}{q}.$$

2. *Inégalité de Hölder.* Soient I un intervalle, $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+$ continues par morceaux telles que f^p et g^q sont intégrables. Montrer que fg est intégrable et que l'on a

$$\int_{\mathrm{I}} fg \leq \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathrm{I}} g^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. *Inégalité de Minkowski.* Soient $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p sont intégrables. Montrer que $(f+g)^p$ est intégrable et que l'on a

$$\left(\int_{\mathrm{I}} (f+g)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathrm{I}} f^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathrm{I}} g^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Chapitre 21

Intégrale : carré intégrable

Exercice 21.1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable. Pour $x > 0$, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

1. Justifier l'existence de F.

2. Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que $\mathrm{F}(x) = o(\sqrt{x})$ lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to 0$.

<u>*Solution.*</u> **1.** Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que f est intégrable sur $]0, x]$. Soit $0 < \varepsilon < x$.

$$\int_\varepsilon^x |f(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\int_\varepsilon^x (1 + f^2(t))\mathrm{d}t \leq \frac{x}{2} + \int_0^\infty f^2(t)\mathrm{d}t$$

donc f est intégrable[1] sur $]0, x]$ et $\boxed{\text{F est bien définie.}}$

2. Soient $0 < x < y$.

$$|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y)| = \left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_x^y f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_x^y \mathrm{d}t} \leq \|f\|_2\sqrt{|x-y|}$$

Ainsi

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\ |\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y)| \leq \|f\|_2\sqrt{|x-y|}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $|y - x| \leq \left(\frac{\varepsilon}{1+\|f\|_2}\right)^2$. Alors

$$|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y)| \leq \|f\|_2\frac{\varepsilon}{1 + \|f\|_2} \leq \varepsilon$$

Ainsi $\boxed{\text{F est uniformément continue.}}$

3. Appliquée telle quelle, l'inégalité de Cauchy-Scharz ne fournit qu'un $\mathrm{O}(\sqrt{x})$ en $+\infty$.

1. f n'est pas nécessairement intégrable sur $[1, +\infty[$: considérer la fonction valant 1 sur $]0, 1]$ et $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur $[1, +\infty[$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Soit $\mathrm{M} > 0$ tel que $\int_{\mathrm{M}}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t \le \varepsilon$ et soit $\mathrm{N} > 0$ tel que $|\mathrm{F}(\mathrm{M})| \le \varepsilon\sqrt{\mathrm{N}}$. Pour $x \ge \max(\mathrm{M}, \mathrm{N})$,

$$\begin{aligned}|\mathrm{F}(x)| &\le |\mathrm{F}(\mathrm{M})| + |\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(\mathrm{M})| \\ &\le |\mathrm{F}(\mathrm{M})| + \sqrt{\int_{\mathrm{M}}^{x} f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_{\mathrm{M}}^{x} \mathrm{d}t} \\ &\le \varepsilon\sqrt{\mathrm{N}} + \varepsilon\sqrt{x - \mathrm{M}} \\ &\le 2\varepsilon\sqrt{x}\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathrm{F}(x) \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{x}).}$

En 0,

$$|\mathrm{F}(x)| \le \sqrt{x}\sqrt{\int_0^x f^2}$$

et puisque $\int_0^x f^2 \underset{0}{\to} 0$, on a $\boxed{\mathrm{F}(x) \underset{0}{=} o(\sqrt{x}).}$

□

Exercice 21.2. Pour $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1([0, a], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, montrer que

$$\int_0^a |ff'| \le \frac{a}{2}\int_0^a f'^2$$

<u>*Solution*</u>. Pour $a \ge x \ge 0$ posons

$$g(x) = \int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t$$

Pour tout $x \in [0, a]$ on a

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t = g(x)$$

et donc

$$\int_0^a |f||f'| \le \int_0^a |g||g'| = \frac{1}{2}\left(g^2(a) - g^2(0)\right) = \frac{g^2(a)}{2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(\int_0^a f'^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^a \mathrm{d}t\right)$$

ce qui fournit finalement

$$\boxed{\int_0^a |ff'| \le \frac{a}{2}\int_0^a f'^2}$$

□

Exercice 21.3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'^2 soient intégrables. Montrer que f admet 0 pour limite en $\pm\infty$.

<u>*Solution*</u>. On démontre d'abord le lemme qui fait l'objet de l'exercice 20.9 : une fonction uniformément continue et intégrable possède une limite nulle en $\pm\infty$. Il reste à prouver le

Lemme 21.3.1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et φ' de carré intégrable. Alors φ est uniformément continue.*
Preuve. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$.

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = \left|\int_x^y \varphi'(t)\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{\left|\int_x^y \varphi'^2\mathrm{d}t\right|}\sqrt{\left|\int_x^y \mathrm{d}t\right|} \le \sqrt{|x-y|}\sqrt{\int_0^\infty \varphi'^2\mathrm{d}t} = \sqrt{|x-y|}\|\varphi'\|_2$$

et donc φ est 1/2-Hölderienne. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$|x-y| \le \frac{\varepsilon^2}{(1+\|\varphi'\|_2)^2} \Rightarrow |\varphi(x)-\varphi(y)| \le \varepsilon$$

et donc φ est uniformément continue.

On déduit de ces deux lemmes le résultat. □

Exercice 21.4. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues. Montrer que

$$f \text{ et } g \text{ de carré intégrable} \not\Rightarrow fg \text{ de carré intégrable}$$

<u>*Solution*</u>. On va construire un contre-exemple affine par morceaux : sur $[n, n+1]$, on considère un pic de hauteur h_n, de base $2\beta_n$ centré en $n+\frac{1}{2}$. On veut que φ soit intégrable mais pas de carré intégrable (φ est le carré de notre contre-exemple, dont on va montrer que le carré du carré n'est pas intégrable).

On a donc $\int_n^{n+1} \varphi^2(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}h_n^2\beta_n$ et $\int_n^{n+1} \varphi = h_n\beta_n$. Il suffit donc de prendre par exemple

$$h_n\beta_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad h_n^2\beta_n = \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire $h_n = n$ et $\beta_n = \frac{1}{n^3}$ pour $n \ge 2$. On a bien $\int \varphi < +\infty$ et $\int \varphi^2 = +\infty$. □

Exercice 21.5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec φ^2 et φ''^2 intégrables.
Montrer que φ'^2 est intégrable et que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'^2 \le \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \varphi^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} \varphi''^2}$$

<u>*Solution*</u>. Soit $\mathrm{M} > 0$.

$$\int_0^{\mathrm{M}} \varphi'^2 = (\varphi\varphi')(\mathrm{M}) - (\varphi\varphi')(0) - \int_0^{\mathrm{M}} \varphi\varphi''$$

or $|\varphi\varphi''| \le \frac{\varphi^2+\varphi''^2}{2}$ donc $\varphi\varphi''$ est intégrable. Supposons alors que $\int_0^{+\infty} \varphi'^2 = +\infty$. Cela impose $\varphi\varphi'(x) \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et donc $\int_0^x (\varphi^2)'(t)dt \underset{+\infty}{\to} +\infty$ d'où $\varphi^2(x) \underset{+\infty}{\to} +\infty$ ce qui est faux puisque φ^2 est intégrable. Donc $\int_0^{+\infty} \varphi'^2 < +\infty$. On raisonne de façon analogue en $-\infty$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2 < +\infty}$$

Cela permet d'affirmer, en reprenant les calculs plus haut, que $\varphi\varphi'$ possède des limites finies en $\pm\infty$. On écrit donc à bon droit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2 = \lim_{+\infty}\varphi\varphi' - \lim_{-\infty}\varphi\varphi' - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varphi''$$

On suppose par l'absurde que $l := \lim_{+\infty} \varphi\varphi' \neq 0$. Par exemple, $l > 0$. Soit t_0 tel que

$$t \geq t_0 \Rightarrow \varphi(t)\varphi'(t) \geq \frac{l}{2}.$$

En intégrant, on obtient pour tout $t \geq t_0$:

$$\varphi^2(t) - \varphi^2(t_0) \geq l(t - t_0)$$

et donc $\varphi^2(t) \underset{+\infty}{\to} +\infty$; absurde. Donc $l = 0$. De même en $-\infty$. Finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varphi''$$

et donc on a par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \varphi'^2 \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \varphi^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} \varphi"^2}}$$

$\square$

Exercice 21.6. Pour $p = 1, 2$ on note

$$\mathrm{L}_p = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue et } f^p \text{ intégrable}\}$$

ainsi que

$$\mathrm{E} = \{f \in \mathrm{L}_2 \mid f\, \mathcal{C}^2 \text{ et } f^{(2)} \in \mathrm{L}_2\}$$

Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que $ff" \in \mathrm{L}_2$, puis que $f' \in \mathrm{L}_2$, et enfin que ff', f et f' ont une limite nulle en $+\infty$.

Solution. $ff"$ est continue, et

$$|ff''| \leq \frac{f^2 + f''^2}{2}$$

donc est intégrable. Ainsi $\boxed{ff'' \in \mathrm{L}_1.}$

Soit $\mathrm{M} \geq 0$.

$$\int_0^{\mathrm{M}} f'^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{M}} f'(t)\mathrm{d}f(t) = f(\mathrm{M})f'(\mathrm{M}) - f(0)f'(0) - \int_0^{\mathrm{M}} f''f$$

Le dernier terme tend vers 0 lorsque M tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde f'^2 pas intégrable, cela signifie alors $f(\mathrm{M})f'(\mathrm{M}) \to +\infty$ c'est-à-dire $(f^2)'(\mathrm{M}) \to +\infty$ et en intégrant les relations de Landau,

$$\mathrm{M} = \int_0^{\mathrm{M}} \mathrm{d}t = o\left(\int_0^{\mathrm{M}} (f^2)'\right) = o\left(f^2(\mathrm{M})\right)$$

d'où on déduit $f^2(\mathrm{M}) \to +\infty$, ce qui est absurde puisque par hypothèse f^2 est intégrable. Donc f'^2 est intégrable. $\boxed{f' \in \mathrm{L}_2}$

On en déduit également que $f(x)f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{L} \in \mathbb{R}$. Mais puisque f' et f sont de carré intégrable, l'inégalité d'Euclide fournit l'intégrabilité de ff', donc $\mathrm{L} = 0$. $\boxed{f(x)f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

De l'intégrabilité de ff', ff", f^2 et f'^2 ont en déduit les limites nulles de f et f' en $+\infty$ en écrivant pour $\mathrm{M} \geq 0$

$$f^2(\mathrm{M}) = f^2(0) + 2\int_0^{\mathrm{M}} f'(t)f(t)\mathrm{d}t = f^2(0) + \int_0^{\infty} f'(t)f(t)\mathrm{d}t + o(1)$$

$\boxed{f \text{ et } f' \text{ ont une limite nulle en } +\infty}$

$\square$

Exercice 21.7 (Opérateur de Hardy)**.** Soit $\mathcal{E} = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue de carré intégrable}\}$. On munit $\mathcal{E}$ de $\|.\|_2$ et pour $f \in \mathcal{E}$ on définit $g = \mathrm{T}f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f$ si $x \neq 0$, $0 \mapsto 0$.

1. Si $f \in \mathcal{E}$, montrer que g est continue et vérifie pour tout $x \geq 0$

$$\int_0^x g^2(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^x fg - xg^2(x)$$

2. Montrer que $g \in \mathcal{E}$

3. Montrer que $\mathrm{T} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $f \mapsto \mathrm{T}f = g$ est un endomorphisme continu de $(\mathcal{E}, \|.\|_2)$ et déterminer $|||\mathrm{T}|||$.

Exercice 21.8. On note L_2 l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que $f' \in \mathcal{L}_2$ et $x \mapsto xf(x) \in \mathrm{L}_2$.

1. Montrer que f est de carré intégrable, et que $x \mapsto xf(x)f'(x)$ est intégrable.

2. En déduire que $x \mapsto xf^2(x)$ possède une limite nulle en $+\infty$.

3. Montrer que

$$\left(\int_0^{\infty} f^2\right)^2 \leq 4\left(\int_0^{\infty} x^2 f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty} f'^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

4. Étudier les cas d'égalité.

Solution. L'énoncé donne la démarche à suivre, générique ; dans un oral, la question 3 serait posée directement.

1. f est clairement de carré intégrable : $f^2(x) \leq x^2 f^2(x)$ pour $x \geq 1$. On fixe $\mathrm{M} > 0$.

$$\int_0^{\mathrm{M}} f^2 = \left[xf^2(x)\right]_0^{\mathrm{M}} - 2\int_0^{\mathrm{M}} \underbrace{xf(x)f'(x)}_{\text{intégrable (C.S.)}} \mathrm{d}x$$

donc $\lim\limits_{+\infty} xf^2(x)$ existe ; on note $l \geq 0$ cette limite.

2. Supposons $l > 0$. Alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$t \geq t_0 \Rightarrow t^2 f^2(t) \geq \frac{lt}{2}$$

et donc en intégrant,

$$\int_{t_0}^{t} x^2 f^2(x)\mathrm{d}x \geq \frac{l}{2}\left(t^2 - t_0\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

c'est absurde. Donc $\boxed{l = 0}$.

3. C'est immédiat avec Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^\infty f^2\right)^2 = \left(2\int_0^{+\infty} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq 4\left(\int_0^\infty x^2 f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty f'^2(x)\mathrm{d}x\right)$$

4. Soit f telle qu'on ait égalité. Si f est nulle, il y a égalité. On suppose par la suite $f \neq 0$. Le cas $f' = 0$ est exclu, puisqu'alors f est constante, donc n'est pas de carré intégrable. On dispose donc de $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$xf(x) = \lambda f'(x)$$

donc il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \mathrm{A}\exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda}\right)$$

mais cette fonction n'est intégrable que si $\lambda > 0$. Bref, on vérifie que dans ce cas ça marche. Ainsi cette inégalité est optimale, avec égalité pour une fonction de type gaussienne :

$$x \mapsto \mathrm{A}\exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda}\right)$$

avec $\lambda > 0$ et $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

□

Exercice 21.9 (Inégalité de Hermann Weyl)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

(i) $t \mapsto tf^2(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

(ii) $t \mapsto tf'^2(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Montrer que f est de carré intégrable et que

$$\int_0^{+\infty} f^2 \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} tf^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} tf'^2(t)\mathrm{d}t}$$

Solution. f est bien de carré intégrable puisque

$$\forall t \geq 1 \quad f^2(t) \leq tf^2(t)$$

et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit

$$\int_0^{\mathrm{M}} |tf(t)f'(t)|\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^{\mathrm{M}} tf^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{\mathrm{M}} tf'^2(t)\mathrm{d}t}$$

et donc $t \mapsto tf(t)f'(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$\left|\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} tf^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} tf'^2(t)\mathrm{d}t}$$

or

$$\int_0^{\mathrm{M}} tf(t)f'(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}tf^2(t)\right]_0^{\mathrm{M}} - \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{M}} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{M}f^2(\mathrm{M}) - \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{M}} f^2(t)\mathrm{d}t$$

et puisque les deux intégrales convergent,

$$\mathrm{M}f^2(\mathrm{M}) \xrightarrow[\mathrm{M}\to+\infty]{} \mathrm{L} \in \mathbb{R}$$

et nécessairement $\mathrm{M} = 0$ car sinon $f^2(\mathrm{M}) \sim \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$ qui n'est pas intégrable. Conclusion : $\int_0^\infty tf(t)f'(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(t)\mathrm{d}t$ et par conséquent

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f^2 \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} tf^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} tf'^2(t)\mathrm{d}t}}$$

$\square$

Chapitre 22

Intégrale : suites et séries

Exercice 22.1 (Théorème de convergence monotone)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite croissante de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}_+$ qui converge simplement vers une fonction $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux. Montrer

(i) Si φ est intégrable, alors $\int_{\mathrm{I}} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathrm{I}} \varphi$.

(ii) Sinon, $\int_{\mathrm{I}} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Solution. Si φ est intégrable, on peut appliquer le théorème de domination (φ domine) ce qui fournit le résultat. Sinon, si

$$\mathrm{L} = \sup \int f_n \in \overline{\mathbb{R}}$$

on peut supposer $\mathrm{L} < +\infty$. Pour $a, b \in \mathrm{I}$ avec $a < b$ on applique le théorème de domination aux restrictions à $[a, b]$ de toutes ces fonctions et on a donc $\int_a^b \varphi \leq \mathrm{L}$. Alors

$$+\infty = \int_{\inf \mathrm{I}}^{0} \varphi + \int_{0}^{\sup \mathrm{I}} \varphi = \lim_{\mathrm{M}\to\inf \mathrm{I}} \int_{\mathrm{M}}^{0} \varphi + \lim_{\mathrm{M}\to\sup \mathrm{I}} \int_{0}^{\mathrm{M}} \varphi \leq 2\mathrm{L} < +\infty$$

absurde ! Donc $\mathrm{L} = +\infty$. Le théorème est prouvé. □

Exercice 22.2 (Intégrale de Gauss)**.** Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Solution. La fonction

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est continue par morceaux et converge simplement vers $t \mapsto e^{-t^2}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On a par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$,

$$0 \leq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$$

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, donc

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Reste à évaluer la suite d'intégrale. On obtient par le changement de variable $t = \sqrt{n}u$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= \sqrt{n}\int_0^1 (1-u^2)^n \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta \mathrm{d}\theta \qquad (u = \sin\theta) \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta \mathrm{d}\theta = \mathrm{W}_{2n+1}\end{aligned}$$

où W_n désigne la n-ième intégrale de Wallis. Or on sait trouver un équivalent de W_n en $+\infty$:

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{2n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \mathrm{d}\sin\theta \\ &= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = 2n(\mathrm{W}_{2n-1} - \mathrm{W}_{2n+1})\end{aligned}$$

donc $\mathrm{W}_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\mathrm{W}_{2n-1}$ et par récurrence immédiate ($\mathrm{W}_1 = 1$) et en réarrangeant les termes :

$$\mathrm{W}_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$$

d'où l'on déduit le résultat :

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

□

Exercice 22.3. Soit

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

f est-elle DSE en 0 ?

Solution. On constate que pour x fixé, l'intégrande est bornée par une exponentielle intégrable, donc est intégrable. Donc f est bien définie.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(tx)^{2n}}{(2n)!}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(tx)^{2n}e^{-t^2}}{(2n)!}\right)\mathrm{d}t$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons

$$u_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{(-1)^n e^{-t^2}t^{2n}}{(2n)!}x^{2n} \end{array}\right.$$

u_n est continue et intégrable, car $u_n = \mathrm{O}(e^{-t^2})$ au voisinage de $+\infty$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(t)$ converge simplement en $t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$ qui est continue. Soit $\mathrm{N} \geq 0$.

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \int_0^\infty |u_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{t^{2n}e^{-t^2}}{(2n)!}x^{2n}\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{ch}(xt)\mathrm{d}t < +\infty$$

donc $\sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{R}_+} u_n(t)\mathrm{d}t$ converge.

On peut donc permuter $\sum$ et $\int$, ce qui fournit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{(-1)^n t^{2n}x^{2n}e^{-t^2}}{(2n)!}$$

Entreprenons alors un calcul rituel. [1]

$$\int_0^\infty t^{2n}e^{-t^2} = \int_{\mathbb{R}_+}\frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

or

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)...\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)...1\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

d'où

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{(2^n)^2 n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

et on en déduit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(-x)^{2n}}{4^n n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

On peut par ailleurs prouver directement que la limite de $f(x)$ est nulle en $+\infty$ à l'aide d'une intégration par parties. $\square$

Exercice 22.4. Prouver que

$$\int_0^1 \frac{\ln y}{y^2-1}\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Solution. Après avoir vérifié l'intégrabilité aux bornes, on va chercher un développement en série de fonctions de $y \mapsto \frac{\ln y}{y^2-1}$.

On considère pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^{2n}\ln t \end{array} \right.$$

et on justifie que la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée pour les séries. (AQT). On peut permuter les signes.

$$\int_0^1 t^{2n}\ln t\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t^{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\left(\left[t^{2n+1}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1\frac{t^{2n}\mathrm{d}t}{2n+1}\right)$$

1. NiiiiiiuuuuuuuuOoooooowwwwwUuuuuiiiii.

d'où en sommant

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln y}{y^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}}$$

□

Exercice 22.5. Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \mathrm{d}\theta.$$

Solution. Posons

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \mathrm{d}t.$$

La suite (a_n) est positive et décroissante. Le théorème de domination assure que $a_n \to 0$. Ainsi la série en question vérifie le CSSA, et donc converge. Reste à calculer sa somme.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+(-1)^n \cos^{n+1}\theta \mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta} + (-1)^n \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}\theta \mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta}}_{\leq a_{n+1}\to 0}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta} = 1$$

par un simple changement de variable en $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

□

Exercice 22.6. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^n) \mathrm{d}t.$$

Solution. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^n)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(t^n)\mathrm{d}t + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^n)\mathrm{d}t$$

Le premier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on le justifie à l'aide du théorème de convergence majorée.

Pour ce qui est du second terme,

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^n)\mathrm{d}t &= \frac{1}{n}\int_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n} \frac{\sin(u)}{u^{1-\frac{1}{n}}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos u}{u^{1-\frac{1}{n}}}\right]_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\underbrace{\frac{1}{n}\int_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n} \frac{\cos u \mathrm{d}u}{u^{2-\frac{1}{n}}}}_{\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t^n}{t^n}\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée fournit encore une limite nulle pour la dernière intégrale. Le reste tend également vers 0.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t^n)\mathrm{d}t = 0}$$

$\square$

Chapitre 23

Intégrales à paramètre

Exercice 23.1 (Théorème de continuité des intégrales à paramètre)**.** On se donne Λ un métrique et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{F}(x) = \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ définie pour $x \in \Lambda$. On suppose que :

(i) Pour tout $x \in \Lambda$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

(ii) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur Λ.

(iii) Pour tout $x_0 \in \Lambda$, il existe un voisinage U de x_0 et φ intégrable sur I tels que :

$$\forall (x,t) \in \mathrm{U} \times \mathrm{I} \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors F est définie et continue sur Λ.

Solution. L'existence de F est obtenue par domination. Il reste à prouver sa continuité en un x_0 donné. Soient U un voisinage de x_0 inclus dans Λ et φ vérifiant

$$\forall (x,t) \in \mathrm{U} \times \mathrm{I} \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

On se donne $(y_n) \in \mathrm{U}^{\mathbb{N}}$ une suite tendant vers x_0 et on note

$$g_n : t \mapsto f(y_n, t).$$

La seconde hypothèse fournit que g_n converge simplement vers $t \mapsto f(x_0,t)$, tout en étant dominée par φ, donc le théorème de convergence dominée s'applique et on a par conséquent

$$\int_{\mathrm{I}} g_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathrm{I}} f(x_0,t)\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire $\mathrm{F}(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{F}(x_0)$. Critère séquentiel vérifié. F est continue. □

Exercice 23.2 (Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre)**.** On se donne Λ un métrique et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{F}(x)=\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\mathrm{d}t$ définie pour $x\in\Lambda$. On suppose que :

(i) Pour tout $x\in\Lambda$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

(ii) Pour tout $t\in\mathrm{I}$, $x\mapsto f(x,t)$ possède une dérivée $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur I.

(iii) Pour tout $x_0\in\Lambda$, $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et il existe un voisinage U de x_0 et φ intégrable sur I tels que :

$$\forall (x,t)\in\mathrm{U}\times\mathrm{I}\qquad\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\varphi(t)$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Λ et

$$\forall x\in\Lambda\qquad\mathrm{F}'(x)=\int_{\mathrm{I}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

<u>*Solution*</u>. Quitte à séparer parties réelle et imaginaire, on suppose f réelle. On se donne $x_0\in\Lambda$ et U un voisinage convexe de x_0 dans Λ, ainsi que φ intégrable sur I tels que

$$(x,t)\in\mathrm{U}\times\mathrm{I}\Rightarrow|f(x,t)|\leq\varphi(t)$$

Soit $(y_n)\in(\mathrm{U}\setminus\{x_0\})^{\mathbb{N}}$ une suite tendant vers x_0. On pose de plus

$$g_n : t\mapsto\frac{f(y_n,t)-f(x_0,t)}{y_n-x_0}$$

Si $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathrm{I}$ on dispose (accroissement finis réels) de $c_n\in[x_0,y_n]$ tel que

$$f(y_n,t)-f(x_0,t)=(y_n-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(c_n,t)$$

et alors

$$|g_n(t)|\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x}(c_n,t)\right|\leq\varphi(t)$$

On applique alors le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_{\mathrm{I}} g_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathrm{I}}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\mathrm{d}t$$

Autrement dit :

$$\frac{\mathrm{F}(y_n)-\mathrm{F}(x_0)}{y_n-x_0}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathrm{I}}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\mathrm{d}t$$

Ainsi F possède une dérivée en x_0 et on a son expression. En appliquant de nouveau le théorème de convergence dominée, cette fois-ci à

$$h_n : t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(y_n,t)$$

on obtient que F′ est continue. □

Exercice 23.3 (Intégrale de Gauss)**.** On pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Relier f' à

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

et en déduire

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Solution. **1.** Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ par $\mathrm{G}(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

— pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto \mathrm{G}(x, t)$ dérivable sur $\mathbb{R}$

— pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x, t)$ est continue, de limite nulle en $+\infty$, donc $x \mapsto \left|\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x, t)\right|$ admet un maximum $\mathrm{M}(t)$ sur $\mathbb{R}$, et $t \mapsto \mathrm{M}(t)$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Les hypothèses du théorème de domination pour les paramètres dérivables sont satisfaites, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{-2x}{e^{x^2}} \int_0^1 e^{-(xt)^2}\mathrm{d}t \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

2. On a donc pour x réel

$$f'(x) = -(\mathrm{F}^2(x))'$$

donc il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ telle que

$$\mathrm{F}^2(x) + f(x) = \mathrm{A}$$

or $\mathrm{F}(0) = 0$ et $f(0) = \frac{\pi}{4}$ donc $\mathrm{A} = \frac{\pi}{4}$. Par ailleurs,

$$0 \leq f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leq e^{-x^2}\frac{\pi}{4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{F}^2 = \frac{\pi}{4}$ et par conséquent

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

□

Exercice 23.4. Soit
$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Montrer que s est $\mathcal{C}^{\infty}$.

2. Déterminer sa série de Taylor en 0. Quel est son rayon de convergence ?

<u>*Solution.*</u> La fonction
$$\mathrm{K} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-t}}{1+xt} \end{array} \right.$$
est continue est deux variables. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^2$
$$|\mathrm{K}(x,t)| \leq e^{-t}$$
donc $\mathrm{K}(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc s est bien définie et continue.

On a pour tout $p \in \mathbb{N}$
$$\frac{\partial^p \mathrm{K}}{\partial x^p}(x,t) = \frac{e^{-t}t^p(-1)^p p!}{(1+xt)^{p+1}}$$
et la fonction $\frac{\partial^p \mathrm{K}}{\partial x^p} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue. On a par ailleurs
$$\left| \frac{\partial^p \mathrm{K}}{\partial x^p}(x,t) \right| \leq \underbrace{p!t^p e^{-t}}_{\mathrm{M}_p(t)}$$
avec M_p fonction continue et intégrable puisque $\mathrm{M}_p(t) = \mathrm{O}(e^{-t/2})$.
$$\boxed{s \text{ est } \mathcal{C}^{\infty} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad s^{(p)}(x) = \int_0^{\infty} \frac{(-1)^p p! t^p e^{-t}}{(1+xt)^{p+1}}\mathrm{d}t}$$
Notamment
$$s^{(p)}(0) = \int_0^{\infty} (-1)^p p! t^p e^{-t}\mathrm{d}t = (-1)^p p! \int_0^{\infty} e^{-t}t^p\mathrm{d}t = (-1)^p p!^2$$
et la série de Taylor de s est donc $\boxed{\sum_{n\geq 0}(-1)^n n! z^n}$ dont le <u>rayon est nul</u>, puisque (critère de D'Alembert) :
$$\left| \frac{(-1)^{p+1}(p+1)!}{(-1)^p p!} \right| = p+1 \to +\infty$$

□

Exercice 23.5 (Fonction Γ - transformée de Mélin)**.** Pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

et on note $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$.

1. Justifier cette définition et montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout $z \in \Pi$. Exprimer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que Γ est continue sur Π et en donner un équivalent en 0^+.

3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer ses dérivées. Montrer qu'elle est log-convexe.

4. Montrer la formule de Gauss :

$$\forall z \in \Pi, \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to +\infty} \left(z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}} \right) e^{\gamma z}$$

Solution. **1.** Deux singularités, en 0^+ et en $+\infty$.

En 0^+, si $z = x + iy \in \Pi$ alors

$$|t^{z-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t}$$

et on a $x - 1 > -1$ donc la fonction est intégrable en 0.

En $+\infty$, on a

$$t^{z-1} e^{-t} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction Γ est bien définie. Par ailleurs, pour tout $z \in \Pi$,

$$\int_0^{\infty} t^z e^{-t} \mathrm{d}t = \underbrace{\left[t^z e^{-t}\right]_0^{\infty}}_{=0} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

et ainsi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

On en déduit, puisque $\Gamma(1) = 1$, que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

2. Soit $z_0 \in \Pi$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$0 < a < \min(1, \Re(z_0)) \leq \max(1, \Re(z_0)) < b$$

et considérons

$$\mathrm{U} = \{z \in \Pi \mid \Re(z) \in [a, b]\}$$

U est un voisinage de z_0. Pour $z \in \mathrm{U}$,

$$\forall t \in]0, 1] \quad |t^z| \leq t^a$$

$$\forall t \in [1, +\infty[\quad |t^z| \leq t^b$$

Et de là on en déduit la domination :

$$\forall z \in \mathrm{U} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |t^{z-1} e^{-t}| \leq \underbrace{(t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}}_{\text{intégrable}}$$

On peut donc appliquer le théorème de domination : Γ est continue sur U, puisque l'intégrande est continue sur $\Pi \times \mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, Γ est continue sur Π.
Pour l'équivalent en 0^*, comme Γ est continue et $\Gamma(1) = 1$,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x}$$

3. On reprend z_0, a et b comme dans la question précédente. $(x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[^2$. La domination est donnée par

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k t^{x-1}e^{-t} \leq \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right)|lnt|^k e^{-t}$$

et la fonction dominante est intégrable. Ainsi Γ est $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$ pour tout k. Donc $\boxed{\Gamma \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[.}$ et on a l'expression de ses dérivées.
$\ln \circ \Gamma$ est convexe :

$$(\ln \circ \Gamma)" = \frac{\Gamma"\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$$

et on constate que

$$\begin{aligned}\Gamma'^2(x) &= \left(\int_0^\infty \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\ln(t)e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^\infty \ln^2(t)e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

et donc $(\ln \circ \Gamma)" \geq 0$, ainsi Γ est ln-convexe, en plus d'être elle-même convexe.

4. Soit $z \in \Pi$ fixé. Pour tout $t \geq 0$ on a

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}t^{x-1}$$

On pose donc

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $(t,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ on a

$$|f_n(t)| \leq \underbrace{e^{-t}t^{x-1}}_{\text{intégrable sur } \mathbb{R}_+^*}$$

où $x = \Re(z) > 0$. Le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\int_0^\infty f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(z)$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_n(t)\mathrm{d}t &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^1 (1-u)^n n^{z-1}u^{z-1}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$e^{z\ln n}\underbrace{\int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\mathrm{d}u}_{\mathrm{I}_n}$$

Calculons I_n pour $n \geq 0$. $\mathrm{I}_0 = \frac{1}{z}$. En intégrant successivement par parties on obtient (après une récurrence)

$$\mathrm{I}_n = \frac{n!}{z(z+1)...(z+n)}$$

Et donc

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}\right)$$

Or :

$$\frac{z(z+1)...(z+n)}{n!} = z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

et donc

$$\frac{z(z+1)...(z+n)}{n!n^z} = z\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right)e^{z\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right)}$$

d'où l'on déduit la formule de Gauss

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty}\left(z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{s}{k}}\right)e^{\gamma z}}$$

valable pour tout $z \in \Pi$.

□

Exercice 23.6. Donner un équivalent simple de

$$\mathrm{I}(t) = \int_0^\pi x^t \sin x \mathrm{d}x$$

lorsque $t \to +\infty$.

Solution. C'est un exercice typique de «pesée» d'une intégrande. On se ramène d'abord en 0 par les changements de variable suivants ($t \geq 1$) :

$$\mathrm{I}(t) = \int_0^\pi (\pi-\theta)^t \sin\theta\mathrm{d}\theta = \pi^t\int_0^\pi\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)^t\sin\theta\mathrm{d}\theta = \pi^{t+1}\underbrace{\int_0^1(1-s)^t\sin\pi s\mathrm{d}s}_{\mathrm{J}(s)}$$

Le «poids» de l'intégrande semble être en $s = 0$ et on va donc comparer $\mathrm{J}(t)$ à

$$\mathrm{K}(t) = \int_0^1 (1-s)\pi s\mathrm{d}s$$

Évaluons d'abord $\mathrm{K}(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(t) &= \int_0^1(1-s)^t\pi s\mathrm{d}s = \int_1^0 y\pi(1-y^{\frac{1}{t}})\left(-\frac{1}{t}y^{\frac{1}{t}-1}\right)\mathrm{d}y \qquad (\text{c.v. } y=(1-s)^t)\\
&= \int_0^1 y\pi\left(1-y^{\frac{1}{t}}\right)\frac{y^{\frac{1}{t}-1}}{t}\mathrm{d}y = \int_0^1\pi\left(1-y^{\frac{1}{t}}\right)\frac{y^{\frac{1}{t}}}{t}\mathrm{d}y\\
&= \frac{\pi}{t}\int_0^1\left(y^{\frac{1}{t}}-y^{\frac{2}{t}}\right)\mathrm{d}y = \frac{\pi}{t}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{t}}-\frac{1}{1+\frac{2}{t}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{t}\frac{\frac{1}{t}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{2}{t}\right)}\\
&\sim \frac{\pi}{t^2}
\end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à évaluer $|\mathrm{J}(t) - \mathrm{K}(t)|$. Pour cela, prouvons le

Lemme 23.6.1. *Il existe* $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $\theta \in [0, \pi]$, $|\theta - \sin\theta| \leq \mathrm{A}\theta^3$.

Preuve. La fonction qui à $\theta \in \mathbb{R}^*$ associe $\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}$ si $\theta \neq 0$ et à zéro associe $\frac{1}{6}$ est sur $\mathbb{R}$ la somme d'une série entière, donc elle est continue et bornée sur $[0, \pi]$.

Finalement,

$$\begin{aligned}|\mathrm{J}(t) - \mathrm{K}(t)| &\leq \int_0^1 (1-s)^t |\pi s - \sin \pi s| \mathrm{d}s \\ &\leq \mathrm{A} \int_0^1 (1-s)^t s^3 \mathrm{d}s = \mathrm{M}(t)\end{aligned}$$

or quand $t \to +\infty$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(t) &= \mathrm{A} \int_0^1 (1-s)^t s^3 \mathrm{d}s = \mathrm{A} \int_0^1 y^t (1-y)^3 \mathrm{d}y = \mathrm{A}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{3}{t+2} + \frac{3}{t+3} - \frac{1}{t+4}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t} - 3 + \frac{6}{t} + 3 - \frac{9}{t} - 1 + \frac{4}{t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^3}\right) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{J}(t) \sim \mathrm{K}(t)$. Conclusion :

$$\boxed{\int_0^\pi x^t \sin x \mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^{t+2}}{t^2}}$$

□

Exercice 23.7. Étudier pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_\pi^\infty \frac{\theta \mathrm{d}\theta}{1 + \theta^\alpha \sin^2\theta}$$

Solution. L'intégrande étant positive, on peut se contenter d'étudier la convergence de l'intégrale sous la forme d'une somme d'une série, c'est-à-dire, par exemple, étudier la série de terme général

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\theta \mathrm{d}\theta}{1 + \theta^\alpha \sin^2\theta} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

On va encadrer grossièrement ce terme :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{n\pi \mathrm{d}\theta}{1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2\theta} \leq a_n \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(n+1)\pi \mathrm{d}\theta}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2\theta}$$

et on montre le

Lemme 23.7.1. *Pour tout* $\lambda \geq 0$.

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \lambda \sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\lambda}}$$

Preuve. On effectue le changement de variable $t = \tan\theta$ et on obtient le résultat.

Ce lemme prouvé (par le lecteur), on a donc pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n\pi^2}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^\alpha}} \leq a_n \leq \frac{(n+1)\pi^2}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}}$$

mais les deux encadrants sont équivalents à $\frac{\pi^2 n}{(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}$ et donc $\boxed{\text{l'intégrale converge si et seulement si } \alpha > 4.}$

On définit donc à bon droit

$$\varphi \left\{ \begin{array}{ccc}]4,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\theta \mathrm{d}\theta}{1+\theta^\alpha \sin^2\theta} \end{array} \right.$$

On peut dominer l'intégrande, qui est séparément continue, sur tout intervalle ouvert $]\beta,+\infty[$ avec $\beta > \alpha$. Par application du théorème de domination des intégrales à paramètre continue, $\varphi_{|]\beta+\infty[}$ est continue pour tout $\beta > \alpha$, donc φ est continue. □

Exercice 23.8. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^\pi \ln(1-2x\cos\theta + x^2)\mathrm{d}\theta$$

1. Justifier cette définition.
2. Exprimer $\mathrm{I}(x^2)$, $\mathrm{I}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\mathrm{I}(-x)$ à l'aide de $\mathrm{I}(x)$.
3. Calculer $\mathrm{I}(x)$ pour $0 \leq x < 1$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

Solution. **1.** Pour $\theta \in [0,\pi]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(1-2x\cos\theta + x^2) = (x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \geq 0$$

et il y a égalité si et seulement si ($\theta \in \{0,\pi\}$ et $x = \cos\theta$).

On définit pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ la fonction

$$\varphi_x : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \ln(1-2x\cos\theta + x^2) \end{array} \right.$$

ainsi que

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \ln(2(1-\cos\theta)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \varphi_{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \ln(2(1+\cos\theta)) \end{array} \right.$$

Les φ_x sont continues, donc $\mathrm{I}(x)$ est bien définie si $x \neq \{-1,1\}$ et une évaluation de φ_1 et φ_{-1} montre que ces fonctions sont intégrables : par exemple au voisinage de 0 pour φ_1, on obtient un $\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$. On a un résultat analogue en π pour φ_{-1}. $\boxed{\mathrm{I}(x) \text{ bien définie sur } \mathbb{R}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(-x) &= \int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta + x^2)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \ln(1-2x\cos(\pi-\theta) + x^2)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \ln(1-2x\cos\theta + x^2)\mathrm{d}\theta \\ &= \mathrm{I}(x) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{I est paire.}}$
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{2\cos\theta}{x} + x^2\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(x^2 + 2x\cos\theta + 1\right)\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{I}\left(\frac{1}{x}\right) &= -2\pi\ln x + \mathrm{I}(x)
\end{aligned}$$

Et enfin

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(x^2) &= \int_0^\pi \ln(1 - 2x^2\cos\theta + x^4)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \ln(1 - 2x^2\cos\theta + x^4)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^\pi \ln\left(\left(x^2 - 2x\cos\frac{\theta}{2} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{\theta}{2} + 1\right)\right)\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \ln\left(\left(x^2 - 2x\cos\frac{\theta}{2} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{\theta}{2} + 1\right)\right)\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\mathrm{d}\alpha + 2\int_0^\pi \ln(x^2 + 2x\cos\alpha + 1))\mathrm{d}\alpha\right) \\
&= 2\mathrm{I}(x)
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x > 0$ on a donc

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{I}(x) = \mathrm{I}(-x) \\
\mathrm{I}(x) - \mathrm{I}\left(\frac{1}{x}\right) = 2\pi\ln x \\
\mathrm{I}(x^2) = 2\mathrm{I}(x)
\end{array}\right.$$

Montrons que I est continue sur $[0, 1]$. On pose

$$\mathrm{K} : \left\{\begin{array}{rcl}
[0,1] \times [0, \pi[& \to & \mathbb{R} \\
(x, \theta) & \mapsto & \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)
\end{array}\right.$$

K est continue selon x et θ et

$$\sin^2\theta \leq x^2 - 2x\cos\theta + 1 \leq 4$$

donc

$$|\mathrm{K}(x,\theta)| = |\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)| \leq \underbrace{\ln 4 - 2\ln\sin\theta}_{\text{intégrable}}$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée, et donc I est continue sur $[0, 1]$.
On note $\mu = \max\limits_{x\in[0,1]} |\mathrm{I}(x)|$. Soit $x \in [0, 1]$ tel que $|\mathrm{I}(x)| = \mu$. Alors

$$\mu = |\mathrm{I}(x)| = \left|\frac{\mathrm{I}(x^2)}{2}\right| \leq \frac{\mu}{2}$$

donc $\mu = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{I}(x) = \left\{\begin{array}{rl} 2\pi\ln x & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| \leq 1 \end{array}\right.}$$

$\square$

Exercice 23.9 (Intégrale de Fresnel). **1.** Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

et calculer la valeur commune.

2. On pose pour $t \geq 0$

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}\mathrm{d}x.$$

Montrer que F est continue et étudier sa limite en $+\infty$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\mathrm{F}'(t)$ pour $t > 0$.

4. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$$

converge et calculer sa valeur.

Exercice 23.10. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continues, intégrables et bornées. Montrer que $s \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(s-t)g(t)\mathrm{d}t$ est continue, intégrable et que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(s-t)g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \left(\int_{\mathbb{R}} f\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} g\right)$$

Intégrale : Boîte à outils

Recherche d'équivalent
- Comparaison série/intégrale
- Divination et majoration de la différence

Chapitre 24

Systèmes différentiels linéaires

Exercice 24.1 (Lemme de Gronwall)**.** Soient $a < b$ deux réels, $k \geq 0$ et u, v deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose :

$$\forall x \in [a,b] \quad u(x) \leq k + \int_a^x u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Montrer qu'alors :

$$\forall x \in [a,b] \quad u(x) \leq k \exp\left(\int_a^x v(t)\mathrm{d}t\right)$$

Solution. On suppose $k > 0$. Pour x dans $[a, b]$,

$$\frac{u(x)v(x)}{k + \int_0^x u(t)v(t)\mathrm{d}t} \leq v(x)$$

ce qui fournit en intégrant

$$\ln\left(k + \int_a^x u(t)v(t)\mathrm{d}t\right) - \ln k \leq v(x)$$

et donc

$$k + \int_a^x u(t)v(t)\mathrm{d}t \leq k \exp\left(\int_a^x v(t)\mathrm{d}t\right)$$

ce qui finalement fournit avec l'hypothèse

$$u(x) \leq k \exp\left(\int_a^x v(t)\mathrm{d}t\right)$$

Le résultat est prouvé pour tout $k > 0$. En faisant tendre k vers 0^+, on obtient le résultat (que l'on peut également prouver directement avec des majorations bien trouvées). $\square$

Exercice 24.2 (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** $\mathbb{K}$ désigne le corps de base, égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie non nulle, $A : I \to \mathcal{L}(E)$ et $B : I \to$ continues. On considère le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}) : \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

Alors pour tout (t_0, X_0) dans $I \times E$ il existe une solution et une seule de $(\mathcal{E})$ sur I telle que $X(t_0) = X_0$.

<u>*Solution*</u>. La donnée du problème de Cauchy est équivalente à

$$\forall t \in I \quad X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\mathrm{d}s$$

— Existence : on procède de façon itérative. On pose $X_0(t) = X_0$ pour tout t dans I, puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in I \quad X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X_n(s) + B(s))\mathrm{d}s$$

Soit J un segment non trivial de I contenant t_0. On note à bon droit (continuité et compacité) :

$$M = \sup_{t\in J} |||A(t)|||$$
$$K = \sup_{t\in J} \|X_1(t) - X_0(t)\|$$

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \quad \forall t \in J \quad \|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq \frac{KM^n|t-t_0|^n}{n!}$$

C'est vrai au rang $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai au rang n ? Alors, pour $t \in J$,

$$\begin{aligned}\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\left(X_{n+1}(s) - X_n(s)\right)\mathrm{d}s \right\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)(X_{n+1}(s) - X_n(s))\|\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} KM \times M^n \frac{|s-t_0|^n}{n!}\mathrm{d}s \right| \\ &\leq K\frac{M^{n+1}|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

et la récurrence se propage. On a ainsi sur J, en notant $\alpha = \sup_{t\in J}|t - t_0|$,

$$\|X_{n+1} - X_n\| \leq KM^n \frac{\alpha^n}{n!}$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} X_{n+1} - X_n$ converge normalement sur tout segment de I, donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I. On note X la limite de cette suite, et on peut correctement passer à la limite, notamment sous l'intégrale, puisqu'on remarque que la convergence de $(AX_n + B)$ est également uniforme sur tout segment, tout cela pour obtenir

$$\forall t \in I \quad X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\mathrm{d}s$$

— Unicité : Soient X et Y deux solutions telles que $X(t_0) = Y(t_0) = X_0$. Alors $Z = Y - X$ vérifie $Z(t_0) = 0$ et

$$\forall t \in J \quad Z'(t) = A(t)Z(t)$$

donc

$$\|Z'(t)\| \leq |||A(t)||| \|Z(t)\|$$

pour t dans J et par conséquent, en notant $u(t) = \int_{t_0}^{t} \|Z'\|$ on obtient

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} |||A(s)||| \|Z(s)\| \mathrm{d}s \leq \int_{t_0}^{t} |||A(s)||| u(s) \mathrm{d}s$$

et le lemme de Gronwall (exercice 24.1) fournit $u = 0$, donc Z constante égale à $Z(t_0) = 0$ sur tout segment de I contenant t_0. L'unicité est prouvée.

$\square$

Exercice 24.3. Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{R}^n),\ X'(t) = A(t)X(t)\}.$$

Soient $f_1, ..., f_n$ une base de $\mathcal{E}$.

1. Calculer $\det(f_1, ..., f_n)$.

2. On suppose maintenant que $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et que A est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $X \in \mathcal{E}$. Montrer que X est bornée et possède une limite en $+\infty$.

3. Montrer que l'application φ définie par

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x_0 & \mapsto X(+\infty) \text{ où } X \in \mathcal{E}, X(0) = x_0 & \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Solution. $\square$

Exercice 24.4 (Gronwall - Variante)**.** Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, $k > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, t \geq t_0, \quad f(t) \leq g(t) + k \int_{t_0}^{t} f(u)\mathrm{d}u. \tag{24.1}$$

Montrer que :

$$\forall\, t \geq t_0, \quad f(t) \leq g(t) + k \int_{t_0}^{t} e^{k(t-u)} g(u)\mathrm{d}u.$$

Solution. On pose, pour tout $t \geq t_0$,

$$F(t) = e^{-kt} \int_{t_0}^{t} f(u)\mathrm{d}u.$$

F est $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $t \geq t_0$,

$$F'(t) = e^{-kt} \left(f(t) - k \int_{t_0}^{t} f(u)\mathrm{d}u \right) \leq e^{-kt} g(t)$$

d'après (24.1). Donc pour tout $t \geq t_0$,

$$\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} g(u)e^{-ku}\mathrm{d}u$$

ce qui donne

$$\int_{t_0}^{t} f(u)\mathrm{d}u \leq e^{kt}\int_{t_0}^{t} g(u)e^{-ku}\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} g(u)e^{k(t-u)}\mathrm{d}u$$

et finalement en réinjectant cette inégalité dans (24.1) on obtient

$$\boxed{f(t) \leq g(t) + k\int_{t_0}^{t} e^{k(t-u)}g(u)\mathrm{d}u}$$

□

Exercice 24.5 (Gronwall - Généralisation)**.** Soient $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications continues. On suppose $g \geq 0$ et

$$\forall\, t \in [a,b], \quad 0 \leq f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(u)f(u)\mathrm{d}u. \tag{24.2}$$

Montrer

$$\forall\, t \in [a,b], \quad 0 \leq f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(u)h(u)e^{\int_u^t g}\mathrm{d}u.$$

Solution. Pour $t \geq a$, on pose

$$\mathrm{F}(t) = \int_a^t gf.$$

La fonction F est $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\mathrm{F}' \leq gh + g\mathrm{F}$$

On réécrit cela

$$\mathrm{F}' - g\mathrm{F} = gh + \varphi$$

où $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue négative. $\mathrm{F}_0 : t \mapsto \exp\left(\int_a^t g\right)$ est une solution de l'équation homogène. Il existe $\mathrm{C} : [a,b] \to \mathbb{R}$ continûment dérivable telle que $\mathrm{F} = \mathrm{CF}_0$. En injectant dans l'équation, on obtient

$$\mathrm{C}' = \frac{gh+\varphi}{\mathrm{F}_0}.$$

Par ailleurs, $\mathrm{F}(a) = 0$ donc, pour tout $t \geq a$,

$$\mathrm{C}(t) = \int_a^t \frac{gh+\varphi}{\mathrm{F}_0} = \int_a^t \frac{gh}{\mathrm{F}_0} + \int_a^t \underbrace{\frac{\varphi}{\mathrm{F}_0}}_{\leq 0} \leq \int_a^t g(u)h(u)\exp\left(\int_u^a g\right)\mathrm{d}u$$

ce qui donne finalement en multipliant par $\mathrm{F}_0(t)$,

$$\int_a^t gf \leq \int_a^t g(u)h(u)\exp\left(\int_u^t g\right)\mathrm{d}u$$

et en réinjectant dans (24.2) on obtient

$$\boxed{0 \leq f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(u)h(u)\exp\left(\int_u^t g\right)\mathrm{d}u}$$

□

Exercice 24.6. Soient I un intervalle, a et b deux fonctions réelles continues sur I, et f une solution non identiquement nulle de

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Montrer que les zéros de f sont isolés.

Solution. On raisonne par l'absurde en supposant que f possède un zéro isolé noté α. On dispose donc d'une suite (x_n) de zéros de f qui converge vers α avec $x_n \neq \alpha$ quel que soit n. Alors

$$0 = \frac{f(\alpha) - f(x_n)}{\alpha - x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(\alpha)$$

Donc f est solution du même problème de Cauchy que la fonction nulle, donc f est identiquement nulle ; absurde. $\boxed{\text{Les zéros de } f \text{ sont isolés.}}$ □

Exercice 24.7 (Théorème d'entrelacement de Sturm)**.** Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On se donne $a,b : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continues et $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une solution de $(\mathcal{E})$: $z'' + az' + bz' = 0$. On suppose y non identiquement nulle mais s'annulant au moins deux fois.

1. Établir l'existence de $\alpha, \beta \in \mathrm{I}$, $\alpha < \beta$ tels que $y(\alpha) = y(\beta) = 0$ et $y(t) \neq 0$ pour tout $\alpha < t < \beta$.
2. Montrer que si z est une solution de $(\mathcal{E})$ non liée à y, alors z possède un et un seul zéro sur $]\alpha, \beta[$.

Solution. **1.** Soient u et v vérifiant $u < v$ tels que $y(u)^{=}u(v) = 0$. Soit $w \in]u, v[$ tel que $y(w) \neq 0$. Considérons l'ensemble

$$\mathrm{F} = \{\alpha \in [u, w] \mid y(\alpha) = 0\}$$

qui est un fermé non vide de $[u, v]$ donc de $\mathbb{R}$. On pose à bon droit $\alpha = \sup \mathrm{F}$ et notamment $\alpha \neq w$.
On construit de même $\beta \in]w, v]$ tel que $\forall t \in [w, \beta[\ y(t) \neq 0$. On a ainsi établit l'existence de $\alpha < \beta$ tels que $\boxed{y(\alpha) = y(\beta) = 0}$ et $\boxed{y(t) \neq 0 \text{ pour tout } t \in]\alpha, \beta[.}$

2. y et z forment un système fondamental de solutions, donc $w = y'z - yz'$ ne s'annule pas, donc (TVI) garde un signe constant sur $]\alpha, \beta[$, par exemple $w > 0$. Comme y ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$, $y'(\alpha) = -y'(\beta) \neq 0$ (Cauchy-Lipschitz/Wronskien) ; or $w(\alpha)$ a le même signe que $w(\beta)$ donc $z(\alpha) < 0$ et $z(\beta) > 0$ donc (TVI) z s'annule en un point de $]\alpha, \beta[$, et ceci qu'une seule fois, car z et y jouent des rôles symétriques : deux zéros de z permettraient de trouver un zéro de y dans $]\alpha, \beta[$... Donc il y a bien un et un seul zéro. $\boxed{\text{Les zéros de } z \text{ séparent ceux de } y.}$

□

Exercice 24.8.

$$\mathrm{E} = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R} \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

On définit N et ν sur E par $\mathrm{N}(f) = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$ et $\nu(f) = \|f + f''\|_\infty$.
Montrer que N et ν sont des normes équivalentes sur E.

Solution. L'homogénéité, l'inégalité triangulaire et la séparation découlent des propriétés de $\|.\|_\infty$ ainsi que du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dans le cas de ν.

Il est immédiat que $\boxed{\nu \leq \mathrm{N}.}$ Reste à trouver une constante $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ telle que $\mathrm{N} \leq \mathrm{A}\nu$.
Soit $f \in \mathrm{E}$. Exprimons f à l'aide de $\varphi = f + f''$. f est solution de

$$\begin{cases} y'' + y = \varphi \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Un système fondamental de solutions pour l'équation homogène est $(t \mapsto \cos t, t \mapsto \sin t)$. Selon la méthode de variation de la constante, on dispose de λ, $\mu : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix}$$

et on obtient, après des calculs de routine,

$$\begin{cases} \mu'(t) = \varphi(t) \cos t \\ \lambda'(t) = -\varphi(t) \sin t \end{cases}$$

Il existe a et b des constantes réelles telles que

$$\mu(t) = a + \int_0^t \varphi(u) \cos u \mathrm{d}u \qquad \lambda(t) = b - \int_0^t \varphi(u) \sin u \mathrm{d}u$$

et $f(0) = f'(0) = 0$ fournit $a = b = 0$ ce qui finalement permet d'écrire

$$f(t) = -\cos t \int_0^t \varphi(u) \sin u \mathrm{d}u + \sin t \int_0^t \varphi(u) \cos u \mathrm{d}u = \int_0^t \varphi(u) \sin(t-u) \mathrm{d}u$$

d'où l'on déduit

$$\|f\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty (1 - \cos 1) \qquad \|f''\|_\infty = \|\varphi - f\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty (2 - \cos 1)$$

et finalement $\boxed{\mathrm{N} \leq (3 - 2\cos 1)\nu.}$ □

Exercice 24.9. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant

$$f'(x) + f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$$

Montrer que f tend vers l en $+\infty$.

Solution. On se ramène à une équation différentielle :

$$y' + y = l + \varepsilon$$

avec $\lim\limits_{+\infty} \varepsilon = 0$. La solution générale est obtenue par la méthode de variation de la constante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \alpha e^{-x} + l - e^{-x} + e^{-x} \int_0^x \varepsilon(t) e^t \mathrm{d}t$$

Comme $\int_0^\infty e^t \mathrm{d}t$ diverge et que $\varepsilon(x) = o(1)$, par intégration des relations de Landau,

$$\int_0^x \varepsilon(t) e^t \mathrm{d}t = o(e^x)$$

et donc $e^{-x} \int_0^x \varepsilon(t) e^t \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l}$$

□

Exercice 24.10. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$, λ un nombre complexe de partie réelle strictement négative. On suppose que $(f' - \lambda f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution. On pose $\varphi = f' - \lambda f$. La fonction f est solution de $y' - \lambda y = \varphi$. La résolution de cette équation par la méthode de variation de la constante fournit, pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) = f(0) e^{\lambda t} + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda u} \varphi(u) \mathrm{d}u.$$

Or $\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\varphi(x) e^{-\lambda x} = o(e^{-\lambda x})$ et par intégration des relations de Landau, puisque $\Re(\lambda) < 0$, on obtient $\int_0^t \varphi(u) e^{-\lambda u} \mathrm{d}u = o(e^{-\lambda u})$ ce qui finalement donne

$$f(t) = f(0) e^{\lambda t} + o(1) = o(1)$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 0.}$ □

Exercice 24.11. Soient $a \in]0, +\infty[$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. Montrer que si f est de carré intégrable, alors l'unique solution $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

est de carré intégrable.

Solution. Quitte à séparer $\Re(g)$ et $\Im(g)$ on suppose g réelle.

$$g' + ag = f$$

Donc

$$g'^2 + 2agg' + a^2 g^2 = f^2$$

On suppose par l'absurde que g^2 n'est pas intégrable. Alors, si $\mathrm{M} > 0$,

$$\underbrace{\int_0^{\mathrm{M}} g'^2(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\to \\ +\infty} \mathrm{L}\in[0,+\infty]} + 2a\int_0^{\mathrm{M}} g(t)g'(t)\mathrm{d}t + a^2 \underbrace{\int_0^{\mathrm{M}} g^2(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\to \\ +\infty} +\infty} = \underbrace{\int_0^{\mathrm{M}} f^2(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\to \\ +\infty} \int_0^\infty f^2}$$

donc

$$2a\int_0^{\mathrm{M}} g(t)g'(t)\mathrm{d}t \underset{\mathrm{M}\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

or $2a > 0$ donc finalement

$$\frac{1}{2}g^2(\mathrm{M}) \underset{\mathrm{M}\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Absurde. Donc

$$\boxed{\int_0^\infty g^2(t)\mathrm{d}t < +\infty}$$

□

Exercice 24.12. Soient $\mathrm{R} > 0$ et $q :]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière.
Soient $a, b \in \mathbb{C}$.
Montrer que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -qy \\ (y(0), y'(0)) = (a, b) \end{cases}$$

est la somme d'une série entière.

Solution. On note

$$\mathcal{S} = \{y :]-\mathrm{R},\mathrm{R}[\to \mathbb{C} \mid y\ \mathcal{C}^{\in} \text{ et } y'' = -qy\}$$

qui est un $\mathbb{C}$-e.v de dimension 2. On cherche un e.v de dimension 2 inclus dans $\mathcal{S}$ et constitué de sommes de séries entières. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ dans $\mathbb{C}$ qui sont la somme d'une série entière.

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R et dont la somme y est dans $\mathcal{E}$. Si la somme vérifie le problème de Cauchy, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_n t^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right)t^n$$

et donc pour tout n entier de $\mathbb{N}$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}$$

Soient α et β des complexes. On définit $a_n(\alpha,\beta) = a_n$ par

$$a_0 = \alpha \qquad a_1 = \beta$$

et pour tout $n \geq 0$

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}$$

Soit $r \in]0, \mathrm{R}[$. Montrons que $(a_n r^n)_{n\geq 0}$ est bornée. La suite $(q_n r^n)$ l'est par un réel positif m_r. Soit n_0 tel que $r^2 m_r \leq n_0$. On pose $\mathrm{L} = \max\limits_{0\leq k\leq n_0} |a_n r^n|$ et on montre aisément par récurrence que $(a_n r^n)$ est bornée par L.

Ainsi $(a_n r^n)$ est bornée quel que soit $r \in]0, \mathrm{R}[$, donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à R. Or la somme $f_{\alpha,\beta}$ de cette série est solution du problème de Cauchy associé à la condition initiale (α, β) et donc

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathcal{S} \\ (\alpha,\beta) & \mapsto & f_{\alpha,\beta} \end{array} \right.$$

est linéaire injective. Donc $\varphi(\mathbb{C}^2)$ est de dimension 2 et on a prouvé ce que l'on voulait, c'est-à-dire $\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{S}.}$

□

Exercice 24.13. Résoudre sur $]1, +\infty[$

$$y' + \frac{x}{(1-x^2)} t = 2x$$

<u>*Solution*</u>. Équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre : l'ensemble des solutions est une droite affine.

Une solution de l'équation homogène est $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$. La méthode de variation de la constante λ fournit $\lambda'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = (2\sqrt{x^2-1})'$ et donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme

$$\varphi_c : x \mapsto \left(2\sqrt{x^2-1} + c\right)\sqrt{x^2-1}$$

où $c \in \mathbb{R}$. □

Exercice 24.14 (Méthode de Liouville)**.** Donner un système fondamental de l'équation différentielle :

$$(x+1)y'' - xy' - y = 0$$

sur $]-1, +\infty[$.

<u>*Solution*</u>. Une solution évidente est $x \mapsto e^x$. On applique alors la *méthode de Liouville* en cherchant une solution de la forme

$$y(x) = z(x)e^x$$

On obtient pour z l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$(x+1)z''(x) + (x+2)z' = 0$$

et donc il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad z'(x) = \mathrm{C}\frac{e^{-x}}{x+1}$$

Ce qui donne en intégrant (après une interversion $\int$ et $\sum$ justifiée) :

$$z(x) = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2\left(\ln(x+1) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{nn!}\right)$$

et on a donc ainsi trouvé une seconde solution qui forme, avec la première, un système fondamental. □

Exercice 24.15. Soit $q : \mathbb{R}_+ \to$ continue et intégrable.
Montrer que l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad y'' + qy = 0$$

possède une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Solution. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un plan vectoriel.

On suppose par l'absurde que toutes les solutions sont bornées. On se donne (φ, ψ) un système fondamental de solutions. Alors

$$w = \varphi'\psi - \varphi\psi'$$

ne s'annule pas et

$$\begin{aligned} w' &= \varphi''\psi + \varphi'\psi' - \varphi'\psi' - \varphi\psi'' \\ &= q\varphi\psi - q\varphi\psi = 0 \end{aligned}$$

et donc $w = c \in \mathbb{R}^*$.

Par ailleurs,

$$|\varphi"| \leq |q| \|\varphi\|_\infty$$

donc φ'' est bornée et même intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Donc φ' admet une limite finie en $+\infty$, qui ne peut être que nulle car φ est bornée. Tout cela est également valable pour ψ et ses dérivées, par symétrie des rôles. Mais alors w tend également vers 0 en $+\infty$, ce qui est absurde.

L'ensemble des solutions bornées est un s.e.v de $\mathcal{S}$ distincts de $\mathcal{S}$, donc son complémentaire dans $\mathcal{S}$ est non vide, et le résultat est prouvé. □

Exercice 24.16 (Solutions périodiques)**.** Soit a dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que, quel que soit b dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'équation différentielle

$$y' + ay = b$$

admette une solution 2π-périodique et une seule.

Solution. La solution générale de

$$y' + ay = 0$$

est $x \mapsto \mathrm{C}e^{-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t}$. La méthode de variation de la constante fournit l'ensemble des solutions : on obtient

$$\mathrm{C}'(x) = b(x)e^{-\int_0^x a(t)\mathrm{d}t}$$

et donc les solutions sont de la forme (on allège les notations en posant $\alpha(t) = -\int_0^t a(u)\mathrm{d}u$) :

$$y(x) = \left(\mathrm{K} + \int_0^x b(t)e^{\alpha(t)}\mathrm{d}t\right) e^{-\alpha(x)}$$

Considérons la fonction z définie par $z(x) = y(x + 2\pi)$. Puisque a et b sont 2π-périodique, z est solution de $(\mathcal{E})$. De là,

$$\begin{aligned} y \text{ est } 2\pi\text{-périodique} &\iff z = y \\ &\iff z(0) = y(0) \qquad \text{(d'après le Théorème de Cauchy)} \\ &\iff y(0) = y(2\pi) \end{aligned}$$

Or :

$$y(2\pi) = \left(\mathrm{K} + \int_0^{2\pi} b(t)e^{\alpha(t)}\mathrm{d}t\right) e^{-\alpha(2\pi)}$$

ce qui fournit

$$y(0) = y(2\pi) \iff \mathrm{K} = \left(\mathrm{K} + \underbrace{\int_0^{2\pi} b(t)e^{\alpha(t)}\mathrm{d}t}_{\mathrm{I}_\alpha}\right) e^{-\alpha(2\pi)} \iff \mathrm{K}\left(e^{\alpha(2\pi)} - 1\right) = \mathrm{I}_\alpha$$

Il reste à distinguer les cas :

— Si $\alpha(2\pi) \neq 0$ alors il existe une unique solution 2π-périodique ;

— sinon, alors si $\mathrm{I}_\alpha = 0$, toutes les solutions sont périodiques, si $\mathrm{I}_\alpha \neq 0$, aucune ne l'est.

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante cherchée sur a est qu'elle admette une primitive 2π-périodique. □

Exercice 24.17 (Théorème de Massera)**.**

1. Soit (E, N) un e.v.n, K un convexe compact non vide de E et $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ affine continue et telle que $u(\mathrm{K}) \setminus \mathrm{K}$. Montrer que u possède un point fixe dans K. *Indication : considérer, pour $x \in \mathrm{K}$, la suite* $\left(\frac{\mathrm{id}_\mathrm{E}+u+\ldots+u^n(x)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On considère désormais $\mathrm{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues et périodiques, de même période $\mathrm{T} > 0$. On étudie le système

$$(\mathcal{E}) : \quad \mathrm{X}' = \mathrm{AX} + b$$

X étant une solution de $(\mathcal{E})$, montrer que X est périodique si et seulement si $\mathrm{X}(0) = \mathrm{X}(\mathrm{T})$.

3. On suppose que $(\mathcal{E})$ admet une solution bornée Y. On cherche à établir l'existence d'une solution T-périodique.

a) Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x_0 \mapsto \mathrm{P}(x_0)$, où $\mathrm{P}(x_0)$ est la valeur à l'instant T de la solution de $(\mathcal{E})$ qui vaut x_0 à l'instant 0. Montrer que P est affine.

b) On note

$$\mathrm{V} = \{\mathrm{Y}(n\mathrm{T}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

et K l'adhérence de l'enveloppe convexe de V.

Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$ et en déduire le résultat annoncé.

Solution. **1.** Puisque K est convexe,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m_n = \frac{x + u(x) + \ldots + u^n(x)}{n+1} \in \mathrm{K}$$

et étant stable par u,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u(m_n) = \frac{u(x) + u^2(x) + \ldots + u^{n+1}(x)}{n+1} \in \mathrm{K}$$

On extrait de (m_n) une sous-suite convergente à l'aide de j extractrice. On a alors :

$$u(m_{j(n)}) - m_{j_n} = \frac{u^{j(n)+1}(x) - x}{j(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note m la limite de (m_n). Par continuité de u et d'après ce qui précède, $u(m) = m$. $\boxed{u \text{ possède un point fixe dans K.}}$

2. Voir preuve du lemme 24.22.1.

3. **a)** On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

$$\mathrm{V}_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}^n \\ \mathrm{Y} & \mapsto & \mathrm{Y}(0) \end{array} \right. \qquad \mathrm{V}_\mathrm{T} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}^n \\ \mathrm{Y} & \mapsto & \mathrm{Y}(\mathrm{T}) \end{array} \right.$$

On a pour tout $\mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \mathcal{S}$, tout $\alpha \in [0,1]$ et $i \in \{0, \mathrm{T}\}$

$$\mathrm{V}_i((1-\alpha)\mathrm{Y} + \alpha\mathrm{Z}) = (1-\alpha)\mathrm{V}_0(\mathrm{Y}) + \alpha\mathrm{V}_0(\mathrm{Z})$$

donc V_0 et V_T sont affines et bijectives. $\mathrm{P} = \mathrm{V}_\mathrm{T} \circ \mathrm{V}_0^{-1}$ donc $\boxed{\text{P est affine.}}$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}(n\mathrm{T})$ est la valeur à l'instant T de la solution de $(\mathcal{E})$ qui vaut $\mathrm{Y}(n\mathrm{T})$ à l'instant 0, c'est-à-dire $t \mapsto \mathrm{Y}(n\mathrm{T} + t)$. Donc $\mathrm{P}(\mathrm{V}) = \{\mathrm{Y}((n+1)\mathrm{T}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{V}$.

— P est affine donc $\mathrm{P}(conv(\mathrm{V})) \subset conv(\mathrm{V})$.

— P est continue donc $\mathrm{P}(\underbrace{\overline{conv(\mathrm{V})}}_{\mathrm{K}}) = \overline{\mathrm{P}(conv(\mathrm{V}))} \subset \overline{conv(\mathrm{V})} = \mathrm{K}$.

donc K est stable par P, convexe, fermé, borné car V borné. $\boxed{\text{P possède un point fixe.}}$

□

Exercice 24.18 (Une transformée de Laplace)**.** Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Trouver une équation différentielle satisfaite par $f_{|\mathbb{R}_+^*}$.
3. Montrer que f est continue en 0 et calculer $f(0)$.
4. Calculer $f(x)$.
5. Donner un DL de f en 0.

Solution. **1.** À x fixé, l'intégrande est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dominée en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$, donc f est bien définie.

2. Pour $\alpha > 0$, les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale sont vérifiées par tous les $\frac{\partial^p g_\alpha}{\partial x^p}$ avec

$$g_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc}]\alpha, +\infty[\times\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array} \right.$$

qui sont dominés par $e^{-\frac{t\alpha}{2}}$. Donc $(\alpha \to 0)$ $f_{|\mathbb{R}_+^*}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(p)}(x) = \int_0^\infty \frac{(-t)^p e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

Notamment

$$\boxed{\forall x > 0 \quad f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}}$$

3. L'intégrande est continue et majorée uniformément par $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0, \text{ avec } f(0) = \frac{\pi}{2}.}$

4. On connaît un système fondamental de l'équation : cos et sin sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à trouver $y = \lambda\cos + \mu\sin$ une solution particulière par la méthode de variation de la constante. On trouve

$$\lambda(x) = \alpha + \int_x^{\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta \qquad \mu(x) = \beta - \int_x^{\infty} \frac{\cos\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta$$

d'où

$$f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \cos x\int_x^{\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta + \sin x\int_x^{\infty}\frac{\cos\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta$$

Or

$$|f(x)| \leq \int_0^{\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc puisque $\alpha\cos x + \beta\sin x = o(1)$ on obtient $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent, en réunissant les deux intégrales,

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_x^{\infty}\frac{\sin(\theta - x)}{\theta}\mathrm{d}\theta}$$

5. On reprend l'expression non compacte. On a au voisinage de 0^+, en notant $\mathrm{I} = \int_0^{\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta$,

$$f(x) = (\mathrm{I} + o(1)) - \sin x\int_x^{\infty}\frac{\cos\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta$$

or quand $x \to 0$

$$\left|\int_x^{\infty}\frac{\cos\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leq \left|\int_1^{\infty}\frac{\cos\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta\right| + \int_x^1\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = \left|\int_1^{\infty}\frac{\cos\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta\right| - \ln x$$

ce qui donne $\int_x^{\infty}\frac{\cos\theta}{\theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{O}(-\ln x)$ et donc le terme de droite dans l'expression de f tend vers 0 au voisinage de 0^+. Donc $\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}$.
Avec l'équation différentielle, on a successivement

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} + o(1) \\ f'(x) &= \ln x - \frac{\pi}{2}x + \mathrm{A} + o(x) \\ f(x) &= x\ln x + (\mathrm{A}-1)x - \frac{\pi}{2}x^2 + \mathrm{B} + o(x^2) \end{aligned}$$

or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc $\mathrm{B} = \frac{\pi}{2}$ et

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} + x\ln x + o(x\ln x)}$$

□

Exercice 24.19. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) \geq 0$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad e^{\pi}f(t) + f(t+\pi) \geq 0$$

Solution. On se donne $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$f'' - 2f' + 2f = \varphi$$

On va donc résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = \varphi$$

pour obtenir des informations sur les solutions et répondre au problème.

Un système fondamentale de solutions à l'équation homogène

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

est $(t \mapsto e^{(1+i)t}, t \mapsto e^{(1-i)t})$, un autre, réel, est $(\gamma : t \mapsto e^t \cos t, \delta : t \mapsto e^t \sin t)$.

Selon la méthode de variation de la constante, il existe λ et μ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que

$$\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \delta \\ \delta' \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} f = \lambda\gamma + \mu\delta \\ f' = \lambda\gamma' + \mu\delta' \\ 0 = \lambda'\gamma + \mu'\delta \\ f'' = \lambda\gamma'' + \lambda'\gamma' + \mu\delta'' + \mu'\delta' \end{cases} \iff \begin{cases} f = \lambda\gamma + \mu\delta \\ f' = \lambda\gamma' + \mu\delta' \\ \lambda'\gamma' + \mu'\delta' = \varphi \\ \lambda'\gamma + \mu'\delta = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \gamma' & \delta' \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma'\delta - \delta'\gamma} \begin{pmatrix} \delta' & -\delta \\ -\gamma & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui finalement fournit

$$\begin{cases} \lambda' = \frac{\delta\varphi}{\gamma'\delta - \gamma\delta'} \\ \mu' = -\frac{\gamma\varphi}{\gamma'\delta - \gamma\delta'} \end{cases}$$

Il existe a et b réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) = \left(\int_0^t \frac{\delta(u)\varphi(u)}{w(u)} \mathrm{d}u + a \right) \gamma(t) + \left(\int_0^t \frac{-\gamma(u)\varphi(u)}{w(u)} \mathrm{d}u + b \right) \delta(t)$$

avec pour $u \in \mathbb{R}_+$

$$w(u) = (\gamma'\delta - \gamma\delta')(u) = e^u(\cos u - \sin u)e^u(\sin u) - e^u(\cos u)e^u(\cos u + \sin u) = -e^{2u}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\int_0^t -e^{-u}\varphi(u) \sin u \mathrm{d}u \right) e^t \cos t + \left(\int_0^t e^{-u}\varphi(u) \cos u \mathrm{d}u \right) e^t \sin t + e^t(a \cos t + b \sin t) \\ &= \int_0^t -e^{t-u}\varphi(u) \sin u \cos tu + \int_0^t e^{t-u}\varphi(u) \cos u \sin t + e^t(a \cos t + b \sin t) \\ &= \int_0^t e^{t-u}(\cos u \sin t - \sin u \cos t)\varphi(u)\mathrm{d}u + e^t(a \cos t + b \sin t) \\ &= \int_0^t e^{t-u}\varphi(u) \sin(u-t)\mathrm{d}u + e^t(a \cos t + b \sin t) \\ f(t) &= \int_0^t \varphi(t-v) \sin v e^v \mathrm{d}v + e^t(a \cos t + b \sin t) \end{aligned} \tag{24.3}$$

On a donc en réinjectant l'expression numérotée obtenue :

$$\begin{aligned}
e^\pi f(t)+f(t+\pi) &= \underbrace{e^\pi e^t(a\cos t+b\sin t)+e^{t+\pi}(a\cos(t+\pi)+b\sin(t+\pi))}_{=0}+\ldots \\
&\ldots + e^\pi\int_0^t \varphi(t-v)e^v\sin v\mathrm{d}v+\int_0^{t+\pi}\varphi(t+\pi-v)e^v\sin v\mathrm{d}v \\
&= \int_0^t \varphi(t-v)e^{v+\pi}\sin v\mathrm{d}v+\int_0^{t+\pi}\varphi(t+\pi-v)e^v\sin v\mathrm{d}v \\
&= \int_\pi^{t+\pi} \varphi(t+\pi-w)e^{w}\underbrace{\sin(w+\pi)}_{-\sin w}\mathrm{d}w+\int_0^{t+\pi}\varphi(t+\pi-v)e^v\sin v\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{\pi}\varphi(t+\pi-v)e^v\sin v\mathrm{d}v \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi on a prouvé

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+\quad e^\pi f(t)+f(t+\pi)\geq 0}$$

□

Exercice 24.20. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ deux fois dérivable et bornée. On suppose qu'il existe $a>0$ tel que

$$f''\geq a^2 f$$

1. Montrer que f' possède une limite nulle en $+\infty$.

2. Montrer qu'il en va de même pour f.

3. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\quad f(x)\leq f(0)e^{-ax}$$

<u>*Solution.*</u> **1.** $f''\geq 0$ donc f est convexe. Supposons qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}_+$ tel que $f'(x_0)>0$. Alors, par convexité, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$

$$x\geq x_0\Rightarrow f'(x)\geq f'(x_0)$$

et donc

$$x\geq x_0\Rightarrow f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

ce qui contredit f bornée. Donc $f'\leq 0$ tout en étant croissante, donc possède une limite $\mathrm{L}\in\mathbb{R}_-$ en $+\infty$ qui est forcément nulle car sinon

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'\leq f(0)+\mathrm{L}x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$$

ce qui contredit une nouvelle fois f bornée. Donc $\boxed{\lim_{+\infty} f'=0}$.

2. Puisque $f'\leq 0$, f est décroissante, or f est positive, donc f possède une limite $l\in\mathbb{R}_+$ en $+\infty$. Si $l>0$, alors

$$f''(x)\geq a^2 l$$

et donc $f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, absurde. Donc $\boxed{\lim_{+\infty} f=0}$.

3. — Première méthode : (générique) : on pose $\varphi = f'' - a^2 f$ et on introduit un système fondamentale de
$$y'' - a^2 y = 0$$
(en supposant de plus f de classe $\mathcal{C}^2$) puis on résout avec la méthode de variation des constantes, on arrive alors à montrer le résultat.

— Seconde méthode : De
$$f'' \geq a^2 f$$
on déduit
$$f' f'' \leq a^2 f f'$$
c'est-à-dire
$$\left(\frac{f'^2}{2}\right)' \leq \left(\frac{a^2 f^2}{2}\right)'$$
donc $a^2 f^2 - f'^2$ décroît et possède, d'après ce qui précède, une limite nulle en $+\infty$. Par conséquent,
$$a^2 f^2 \geq f'^2 \qquad af \geq -f' \qquad af + f' \geq 0$$
et donc
$$\left(e^{at} f(t)\right)' = (af + f')e^{at} \geq 0$$
donc $t \mapsto e^{at} f(t)$ décroît et on en déduit immédiatement
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leq f(0)e^{-ax}}$$

□

Exercice 24.21 (Problème de recollement)**.** Étudier l'équation différentielle
$$t(t-1)y' + 2y = 3t$$

Solution. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire passée sous forme non résolue. Les «problèmes» de recollement se situent en $t = 1$ et $t = 0$. On pose par conséquent
$$\mathrm{U} =]-\infty, 0[\qquad \mathrm{V} =]0, 1[\qquad \mathrm{W} =]1, +\infty[$$
Si $\mathrm{J} \in \{\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \mathrm{U} \cup \mathrm{W}, \mathrm{V} \cup \mathrm{W}, \mathbb{R}\}$ on note
$$\mathcal{S}_\mathrm{J} = \{y : \mathrm{J} \to \mathbb{R} \mid y \text{ dérivable et } \forall t \in \mathrm{J}\, t(t-1)y'(t) + 2y(t) = 3t\}$$
Les ensembles $\mathcal{S}_\mathrm{U}$, $\mathcal{S}_\mathrm{V}$ et $\mathcal{S}_\mathrm{W}$ sont des droites affines. Sur chacun des intervalles U, V et W, on résout l'équation $y' + \frac{2y}{t(t-1)} = \frac{3}{t-1}$.

Une solution de l'équation homogène est
$$\begin{cases} \mathrm{J} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^2}{(t-1)^2} \end{cases}$$
et si l'on cherche une solution particulier sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\frac{t^2}{(t-1)^2}$ on trouve
$$\lambda'(t)\frac{t^2}{(t-1)^2} = \frac{3}{t-1} \qquad \lambda'(t) = \frac{3(t-1)}{t^2} \qquad \lambda(t) = 3\ln|t| + \frac{3}{t} + \mathrm{C}$$

et donc

$$\mathcal{S}_{\mathrm{J}} = \{\varphi_{\mathrm{J},c} \mid c \in \mathbb{R}\} \quad \text{où} \quad \varphi_{\mathrm{J},c} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{J} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(3\ln|t| + \frac{3}{t}\right)\frac{t^2}{(t-1)^2} + c\frac{t^2}{(t-1)^2} \end{array} \right.$$

Il reste à faire les recollements. Regardons ce qu'il se passe en 0. Soit $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{U}\cup\mathrm{V}}$. Les restrictions de f respectivement à U et V sont solutions sur ces intervalles. Il existe $\mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} &\forall t < 0 & f(t) &= \left(3\ln|t| + \frac{3}{t}\right)\frac{t^2}{(t-1)^2} + \mathrm{C}\frac{t^2}{(t-1)^2} \\ &\forall t \in]0,1[& f(t) &= \left(3\ln|t| + \frac{3}{t}\right)\frac{t^2}{(t-1)^2} + \mathrm{D}\frac{t^2}{(t-1)^2} \end{aligned}$$

Pour $t \underset{<}{\to} 0$ on obtient $\lim f = 0$, tout comme pour $t \underset{>}{\to} 0$. On peut donc définir une fonction continue γ comme valant 0 en 0, et les restrictions de f sur U et V. En 0^+, $\gamma(t) = 3t + o(t)$, idem en 0^-, donc γ est dérivable à droite et à gauche en 0, avec les mêmes dérivées, donc γ est dérivable en zéro, et finalement γ est solution de l'équation différentielle sur $]-\infty, 1[$. $\boxed{\mathcal{S}_{]-\infty,1[} \text{ espace affine de dimension 2.}}$

Regardons à présent ce qu'il se passe en 1. Soit $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{V}\cup\mathrm{W}}$.

$$\begin{aligned} &\forall t \in]0,1[& f(t) &= \left(3\ln|t| + \frac{3}{t}\right)\frac{t^2}{(t-1)^2} + \mathrm{A}\frac{t^2}{(t-1)^2} \\ &\forall t > 1 & f(t) &= \left(3\ln|t| + \frac{3}{t}\right)\frac{t^2}{(t-1)^2} + \mathrm{B}\frac{t^2}{(t-1)^2} \end{aligned}$$

On effectue un développement limité en 1 de f. $t = 1 + h$. Pour étudier la dérivabilité il faut développer au-dessus du $o(h^3)$. Lorsque $h \underset{<}{\to} 0$,

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \frac{1}{h^2}\left(3(1+2h+h^2)\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right) + 3 + 3h + \mathrm{A}(1+2h+h^3)\right) \\ &= \ldots \\ &= \frac{(3+\mathrm{A}) + h(6+2\mathrm{A}) + h^2\left(\frac{9}{2} + \mathrm{A}\right) + h^3 + o(h^3)}{h^3} \end{aligned}$$

ce qui impose pour un recollement $\mathrm{A} = -3$. De même pour B. On alors une solution. Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} \text{ espace affine de dimension 1}}$$

$\square$

Exercice 24.22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continue et 1-périodique. On suppose que $Sp(\mathrm{M}) \cap 2i\pi\mathbb{Z} = \varnothing$.
Montrer que le système différentiel linéaire

$$(\mathcal{E}) : \quad \mathrm{X}' = \mathrm{MX} + \mathrm{B}(t)$$

possède une unique solution 1-périodique.

Solution. $(\mathcal{E})$ est un système différentiel linéaire d'ordre 1 avec second membre dans l'espace des phases $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des solutions est un espace affine de dimension n. Le système homogène associé est

$$X' = MX$$

dont les solutions sont les $X_U : t \mapsto \exp(tM)U$ où $U \in \mathbb{R}^n$. La méthode de variation de la constante donne la solution générale :

$$X(t) = \exp(tM)\left(X_0 + \int_0^t \exp(-sM)B(s)\mathrm{d}s\right)$$

avec $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Montrons qu'il existe au plus une solution 1-périodique. Soient X et Y de telles solutions. $Z = X - Y$ est solution du système homogène. Pour tout t réel,

$$Z(t) = \exp(tM)Z(0)$$

et $Z(0) = Z(1) = \exp(M)Z(0)$. Supposons $X \neq Y$. Alors $Z(0) \neq 0$ et $Z(0)$ est un vecteur propre de $\exp(M)$ associé à la valeur propre 1. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de M comptées avec leur multiplicité. Dans $\mathbb{C}$, il existe P inversible telle que

$$M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

Donc

$$\exp(M) = P\exp(T)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$$

Or $Sp(M) \cap 2i\pi\mathbb{Z} = \varnothing$ donc 1 n'est pas valeur propre de $\exp(M)$, absurde.

$$\boxed{\text{Il existe au plus une solution 1-périodique.}}$$

Construisons à présent telle solution. On prouve pour commencer le

Lemme 24.22.1. *Si* Y *est solution de* $(\mathcal{E})$*, alors* Y *est* 1*-périodique si, et seulement si,* $Y(0) = Y(1)$.

Preuve. Condition nécessaire. C'est évident. Condition suffisante. Si $Z(t) = Y(t+1)$ alors Z est également solution de $(\mathcal{E})$:

$$Z'(t) = Y'(t+1) = MY(1+t) + B(t+1) = MZ(t) + B(t)$$

or $Z(0) = Y(1) = Y(0)$ donc $Z = Y$ d'après le théorème d'unicité de Cauchy. Ainsi Y est 1-périodique.

Soit $U \in \mathbb{R}^n$ et X_U une solution générale de la forme donnée plus haut.

$$\begin{aligned} X_U(0) = X_U(1) &\iff U = \exp(M)\left(U + \int_0^1 \exp(-sM)B(s)\mathrm{d}s\right) \\ &\iff (I - \exp M)U = \exp M\int_0^1 \exp(-sM)B(s)\mathrm{d}s \\ &\iff U = (I - \exp M)^{-1}\exp M\int_0^1 \exp(-sM)B(s)\mathrm{d}s \qquad (1 \notin Sp(\exp M)) \end{aligned}$$

Ainsi on peut exhiber une solution 1-périodique. On a d'ailleurs directement l'unicité avec ce raisonnement par équivalence et le lemme... □

Exercice 24.23. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = C$, $AC = CA$, $BC = CB$.

1. Montrer que A, B et C sont cotrigonalisables.

2. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exp(-t(A+B))\exp(tA)\exp(tB) = \exp\left(\frac{t^2C}{2}\right)$$

<u>*Solution.*</u> **1.** Si $C = 0$, alors A, B et C sont cotrigonalisables puisqu'alors A, B et C commutent (cf chapitre réduction). On formule l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$: Pour tout E $\mathbb{C}$-e.v de dimension n, si $A, B, C \in \mathcal{L}(E)$ avec $A \circ B - B \circ A = C$, $A \circ C = C \circ A$ et $B \circ C = C \circ B$, alors il existe une base de E qui trigonalise simultanément A, B et C.

$\mathcal{H}_1$ est vraie. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_{n-1}$ soient vraies. Soient E, A, B et C comme dans l'hypothèse de récurrence. Notons $F_1, ..., F_p$ les ous-espaces caractéristiques de C. Chaque F_i est stable par A, B et C, et

$$\oplus F_i = E$$

— Si $p \geq 2$, alors $\dim F_i < n$ et on applique l'hypothèse de récurrence sur chaque induit de A, B et C ; les bases obtenues forment une base de E, et $\mathcal{H}_n$ est prouvée ;

— si $p = 1$, C possède une seule valeur propre λ et

$$n\lambda = \operatorname{tr} C = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$$

Donc $\lambda = 0$. On a déjà traité le cas où $C = 0$. Si $C \neq 0$, on se donne G un supplémentaire quelconque de $\ker C$ dans E. $\ker C$ est stable par A, B et C. Soit $\mathcal{B}_{\ker C}$ une base de $\ker C$ qui cotrigonalise les induits de A, B et C sur $\ker C$, que l'on complète à l'aide d'une base de G en une base de E, notée $\mathcal{B}$. On a alors

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{\ker F} & * \\ 0 & A_G \end{pmatrix} \qquad [B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B_{\ker F} & * \\ 0 & B_G \end{pmatrix} \qquad [C]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & C_G \end{pmatrix}$$

A_G, B_G et C_G vérifient les hypothèses de récurrence, donc sont cotrigonalisables.

La récurrence se propage et le résultat est prouvé.

2. On pose pour $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi(t) = \exp\left(-t(A+B)\right)\exp(tA)\exp(tB)$$

$$\Psi(t) = \exp\left(\frac{t^2C}{2}\right)$$

On tache de montrer que Φ et Ψ sont solutions du même problème de Cauchy. On a d'une part :

$$\begin{cases} \Psi'(t) = tC\Psi(t) \\ \Psi(0) = I_n \end{cases}$$

C'est moins commode pour Φ.

$$\begin{aligned} \Phi'(t) = &-\exp(-t(A+B))(A+B)\exp(tA)\exp(tB) + \exp(-t(A+B))A\exp(tA)\exp(tB) + ... \\ &... + \exp(-t(A+B))\exp(tA)B\exp(tB) \\ &= \exp(-t(A+B))\left(-(A+B)\exp(tA) + A\exp(tA) + \exp(tB)B\right)\exp(tB) \\ &= \exp(-t(A+B))\left(-B\exp(tA) + \exp(tA)B\right)\exp(tB) \end{aligned}$$

De plus, $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} + \mathrm{C}$ et A commute avec C donne par récurrence :

$$\forall n \geq 0 \quad \mathrm{A}^n\mathrm{B} = \mathrm{BA}^n + n\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{C}$$

et donc

$$\frac{t^n\mathrm{A}^n\mathrm{B}}{n!} = \frac{t^n\mathrm{BA}^n}{n!} + \frac{nt^n\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{C}}{n!}$$

ce qui donne par continuité de la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathrm{A}^n\mathrm{B}}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}t^n\mathrm{A}^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{C}}{n!} \\
\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathrm{A}^n}{n!}\right)\mathrm{B} &= \mathrm{B}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathrm{A}^n}{n!} + t\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n\mathrm{A}^{n-1}}{n!}\right) \\
\exp(t\mathrm{A})\mathrm{B} &= \mathrm{B}\exp(t\mathrm{A}) + t\exp(t\mathrm{A})\mathrm{C}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \exp(-t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))(t\exp(t\mathrm{A})\mathrm{C})\exp(t\mathrm{B}) && (e^{t\mathrm{B}} \in \mathbb{C}[\mathrm{B}]) \\
&= t\mathrm{C}\exp(-t(\mathrm{A}+\mathrm{B}))\exp(t\mathrm{A})\exp(t\mathrm{B}) && (\text{C commute avec A et B}) \\
&= t\mathrm{C}\varphi(t)
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé.

□

Exercice 24.24. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que toute solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ tend vers 0 en $+\infty$ si, et seulement si, toute valeur propre de A est de partie réelle strictement négative.

Solution. On adopte un point de vue géométrique. On se donne donc $u \in \mathrm{E}$ et... (...) □

Exercice 24.25. **1.** Soient φ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) l'idéal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $\{\varphi,\psi\}$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

(ii) $\varphi^{-1}(\{0\}) \cap \psi^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) $f^{-1}(\{0\}) \cap f'^{-1}(\{0\}) = \varnothing$;

(ii) $\exists\, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)g'(x) - f'(x)g(x) > 0$$

Exercice 24.26. Soit β une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur β pour que le système différentiel

$$\begin{cases} x'' = -\beta(t)y' \\ y'' = \beta(t)x' \end{cases}$$

admette une solution périodique non constante.

Solution. Voir `http://www.rms-math.com/index.php?option=com_staticxt&Itemid=157&staticfile=RMS126-365.html` □

Chapitre 25

Calcul différentiel, équations aux dérivées partielles et courbes.

Exercice 25.1. Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n de dimension finie. Montrer que

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{G}\ell(\mathrm{E}) & \to & \mathcal{G}\ell(\mathrm{E}) \\ u & \mapsto & u^{-1} \end{array} \right.$$

est différentiable en tout point $\omega \in \mathcal{G}\ell(\mathrm{E})$ et qu'alors pour tout $h \in \mathcal{G}\ell(\mathrm{E})$

$$\mathrm{d}\Phi_\omega(h) = -\omega^{-1} \circ h \circ \omega^{-1}$$

Solution. On rappelle que $\mathcal{G}\ell(\mathrm{E})$ est bien un ouvert de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ puisque $\mathcal{G}\ell(\mathrm{E}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

Si $|||h||| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n h^n$ est absolument convergente donc (dimension finie) converge, donc $(\mathrm{id} + h)$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n h^n$.

On a alors

$$(\mathrm{id} + h)^{-1} - (\mathrm{id})^{-1} + h = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n h^n$$

$$|||\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n h^n||| \leq \frac{|||h|||^2}{1 - |||h|||} = o(|||h|||)$$

Dans le cas général, il suffit d'écrire :

$$(\omega + h)^{-1} = (\mathrm{id} + \omega^{-1}h)^{-1} \circ \omega^{-1}$$

pour se ramener au cas précédent pour $|||h||| \leq \frac{1}{|||\omega^{-1}|||}$, et de faire le même développement limité.

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_\omega(h) = -\omega^{-1} \circ h \circ \omega^{-1}}$$

$\square$

Exercice 25.2. Soit $(\mathrm{E}, \langle.|.\rangle)$ un espace euclidien. Montrer que la norme euclidienne est différentiable en tout point a de $\mathrm{E} \setminus \{0\}$ et que sa différentielle est $h \mapsto \left\langle \frac{a}{\|a\|} \middle| h \right\rangle$.

Solution. L'application

$$\mathrm{L} : \begin{cases} \mathrm{E} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \left\langle \dfrac{a}{\|a\|} \middle| h \right\rangle \end{cases}$$

est linéaire. Méthode brute.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\|a+h\| - \|a\| - \mathrm{L}(h)}{\|h\|} \right| &= \frac{\left| \sqrt{\langle a+h|a+h\rangle} - \sqrt{\langle a|a\rangle} - \mathrm{L}(h) \right|}{\|h\|} \\
&= \frac{\left| \sqrt{\langle a|a\rangle + 2\langle a|h\rangle + \langle h|h\rangle} - \sqrt{\langle a|a\rangle} - \mathrm{L}(h) \right|}{\|h\|} \\
&= \frac{\|a\|}{\|h\|} \left| \sqrt{1 + \underbrace{2\left\langle \frac{a}{\|a\|} \middle| h \right\rangle + \frac{\|h\|^2}{\|a\|^2}}_{\gamma(h)}} - 1 - \left\langle \frac{a}{\|a\|^2} \middle| h \right\rangle \right| \\
&= \frac{\|a\|}{\|h\|} \left| 1 + \frac{1}{2}\left(2\left\langle \frac{a}{\|a\|^2} \middle| h \right\rangle + \left(\frac{\|h\|}{\|a\|}\right)^2 \right) + \gamma(h)\varepsilon(\gamma(h)) - 1 - \left\langle \frac{a}{\|a\|^2} \middle| h \right\rangle \right| \\
&= \frac{\|a\|}{\|h\|} \left| \frac{1}{2}\left(\frac{\|h\|}{\|a\|}\right)^2 + \gamma(h)\varepsilon(\gamma(h)) \right| \\
&\leq \frac{\|h\|}{2\|a\|} + \|a\||\varepsilon(\gamma(h))| \left(2\left\langle \frac{a}{\|a\|^2} \middle| \frac{h}{\|h\|} \right\rangle + \frac{\|h\|}{\|a\|^2} \right) \\
&\leq \frac{\|h\|}{2\|a\|} + \|a\||\varepsilon(\gamma(h))| \left(\frac{2}{\|a\|} + \frac{\|h\|}{\|a\|} \right)
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue à l'aide de Cauchy-Schwarz.

Méthode élégante : on note f la fonction racine carrée et $g : x \mapsto \langle x|x\rangle$. La règle de la chaîne fournit le résultat : pour $a \neq 0$,

$$\mathrm{d}f \circ g_a(h) = \mathrm{d}f_{g(a)} \circ \mathrm{d}g_a(h) = \frac{\mathrm{d}g_a(h)}{2\sqrt{\langle a|a\rangle}} = \frac{\langle a|h\rangle}{\|a\|}$$

car $\mathrm{d}g_a(h) = 2\langle a|h\rangle$ comme le montre un calcul élémentaire. □

Exercice 25.3. Montrer qu'une norme n'est jamais différentiable en 0.

Solution. Sinon, $\mathrm{L} := \mathrm{dN}_0$. Alors,

$$\frac{\mathrm{N}(h) - \mathrm{N}(0) - \mathrm{L}(h)}{\mathrm{N}(h)} = 1 - \mathrm{L}\left(\frac{h}{\mathrm{N}(h)}\right)$$

ce qui donne pour $v \neq 0$ de norme assez petite et $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\left(\frac{tv}{\mathrm{N}(tv)}\right) &= \mathrm{L}\left(\frac{v}{\mathrm{N}(v)}\right) && \text{(si } t > 0\text{)} \\
&= -\mathrm{L}\left(\frac{v}{\mathrm{N}(v)}\right) && \text{(si } t < 0\text{)}
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{L}\left(\frac{v}{\mathrm{N}(v)}\right) = 0$ pour que la limite de $\frac{\mathrm{N}(tv) - \mathrm{L}(tv)}{\mathrm{N}(tv)}$ existe en zéro ; absurde. □

Exercice 25.4. **1.** Montrer que le déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Calculer la différentielle du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Refaire le calcul cette fois-ci en passant par les dérivées partielles par rapport aux E^{ij}.

Solution. **1.** Fonction n-linéaire en les colonnes ou polynômiale en les coefficients.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note a_{ij} le déterminant de la matrice extraite de M en supprimant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne. Le déterminant est n-linéaire, donc pour $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\det(\mathrm{M}).\mathrm{H} &= \sum_{j=1}^{n} \det(\mathrm{C}_1(\mathrm{M}), ..., \mathrm{C}_{j-1}(\mathrm{M}), \mathrm{C}_j(\mathrm{H}), \mathrm{C}_{j+1}(\mathrm{M}), ..., \mathrm{C}_n(\mathrm{M})) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (-1)\mathrm{H}_{ij} a_{ik} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}_{ij} (\mathrm{Com}\,\mathrm{M})_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}_{ij}\, {}^t(\mathrm{Com}\,\mathrm{M})_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{H}\, {}^t\mathrm{Com}\,\mathrm{M})_{ii} = \mathrm{tr}(\mathrm{H}\, {}^t\mathrm{Com}\,\mathrm{M})
\end{aligned}$$

3. $\mathrm{M} = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Soit $1 \le k, l \le n$. En développant par rapport à la $l^{\text{ème}}$ colonne,

$$\det \mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{i,l}\mu_{i,l}$$

Or $x_{k,l}$ n'intervient pas dans le mineur $\mu_{i,l}$ pour tout $1 \le i \le n$. Par conséquent, avec des notations quelque peu abusives,

$$\frac{\partial \det}{\partial x_{k,l}}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \frac{\partial}{\partial x_{k,l}} (x_{i,l}\mu_{i,l}) = (-1)^{k+l}\mu_{k,l}$$

Et on en déduit

$$\mathrm{d}\det(\mathrm{M}) \cdot (h_{ij}) = \sum_{1 \le k,l \le n} (-1)^{k+l} \mu_{k,l} h_{k,l} = ... = \mathrm{tr}(\mathrm{H}\, {}^t\mathrm{Com}\,\mathrm{M})$$

□

Exercice 25.5. Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, calculer la différentielle de

$$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \mapsto & \int_0^1 f(\mathrm{P}(t))\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Solution. Un développement limité de f en $x_0 + h$ donne

$$f(x_0 = h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \varepsilon(x_0, h)h$$

et on dispose de $c_{x_0,h} \in]x_0, x_0 + h[$ tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(c_{x_0,h})$ ce qui donne

$$|\varepsilon(x_0, h)| = |f'(c_{x_0,h}) - f'(x_0)|$$

On calcule alors

$$\mathrm{F}(\mathrm{P}_0+\mathrm{H})-\mathrm{F}(\mathrm{P}_0)=\int_0^1(f(\mathrm{P}_0(t)+\mathrm{H}(t))-f(\mathrm{P}_0(t))\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{P}_0+\mathrm{H})-\mathrm{F}(\mathrm{P}_0)-\int_0^1 f'(\mathrm{P}_0(t))\mathrm{H}(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\varepsilon(\mathrm{P}_0(t),\mathrm{H}(t))\mathrm{d}t$$

$$|\mathrm{F}(\mathrm{P}_0+\mathrm{H})-\mathrm{F}(\mathrm{P}_0)-\int_0^1 f'(\mathrm{P}_0(t))\mathrm{H}(t)\mathrm{d}t|\leq\|\mathrm{H}\|_\infty\delta(\mathrm{H})$$

où

$$\delta(\mathrm{H})=\int_0^1|\varepsilon(\mathrm{P}_0(t),\mathrm{H}(t))|\mathrm{d}t=\int_0^1||f'(c_{\mathrm{P}_0(t),\mathrm{H}(t)})-f'(\mathrm{P}_0(t))\|\underset{\|\mathrm{H}\|_\infty\to 0}{\longrightarrow}0$$

par uniforme continuité de f'. Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{dF}_{\mathrm{P}_0}(\mathrm{H})=\int_0^1 f'(\mathrm{P}_0(t))\mathrm{H}(t)\mathrm{d}t}$$

□

Exercice 25.6 (Différentiabilité du minimum)**.** Soient E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie, U un ouvert de E et $\varphi_1,...,\varphi_p:\mathrm{U}\to\mathbb{R}$. On pose $\psi=\min(\varphi_1,...,\varphi_p)$.

1. On suppose $\varphi_1,...,\varphi_p$ continues. Montrer que ψ est continue.
2. Soit $\omega\in\mathrm{U}$. On suppose $\varphi_1,...,\varphi_p$ différentiables en ω. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit différentiable en ω.

Solution. **1.** On a

$$\min(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}-\frac{|\varphi_1-\varphi_2}{2}$$

donc $\min(\varphi_1,\varphi_2)$ est continue. On généralise par récurrence (associativité des min).

2. On pose tout d'abord

$$\mathrm{I}=\{i\in[\![1,n]\!]\mid\varphi_i(\omega)=\psi(\omega)\}$$

Condition nécessaire. Soit $i\in\mathrm{I}$. L'application $\varphi_i-\psi$ présente en ω un minimum global, donc $\mathrm{d}(\varphi_i-\psi)(\omega)=0$ et $\boxed{\mathrm{d}\varphi_i(\omega)=\mathrm{d}\psi(\omega).}$

Condition suffisante. On se donne $\|.\|$ une norme sur E et on suppose que

$$\forall\, i,j\in\mathrm{I},\ \mathrm{d}\varphi_i(\omega)=\mathrm{d}\varphi_j(\omega)$$

On pose $\mathrm{K}=[\![1,n]\!]\setminus\mathrm{I}$. On note L la différentielle commune. Les $\varphi_1,...,\varphi_p$ sont continues en ω. Pour $i\in\mathrm{K}$, $\varphi_i(\omega)>\psi(\omega)$ donc il existe V_i un voisinage de ω tel que

$$\forall\, x\in\mathrm{V}_i,\ \varphi_i(x)>\psi(x)$$

On pose $\mathrm{V}=\underset{i\in\mathrm{K}}{\cap}\mathrm{V}_i$. V est un voisinage ouvert de ω tel que

$$\forall\, x\in\mathrm{V},\ \psi(x)=\min_{i\in\mathrm{I}}\varphi_i(x).$$

Pour $i\in\mathrm{I}$, soit $\varphi_i:\mathrm{V}\to\mathbb{R}$ continue et nulle en ω telle que

$$\forall\, x\in\mathrm{V},\ \varphi_i(x)=\psi(x)+\mathrm{L}(x-\omega)+\|x-\omega\|\varepsilon_i(x)$$

Posons alors

$$\varepsilon : \begin{cases} \mathrm{V} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \min_{i \in \mathrm{I}} \varepsilon_i(x) \end{cases}$$

On a alors, en passant au min, pour tout x dans V,

$$\psi(x) = \psi(\omega) + \mathrm{L}(x - \omega) + \varepsilon(x)\|x - \omega\|$$

Donc ψ est différentiable en ω.

$$\boxed{\psi \text{ différentiable en } \omega \Leftrightarrow \forall\, i, j \in \mathrm{I},\ \mathrm{d}\varphi_i(\omega) = \mathrm{d}\varphi_j(\omega)}$$

□

Exercice 25.7. Soit f une fonction définie sur un ouvert connexe par arcs Ω de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
Montrer que f est affine si et seulement si f est différentiable sur Ω et df est constante.

Solution. CONDITION NÉCESSAIRE. C'est clair.

CONDITION SUFFISANTE. On note L la différentielle de f en tout point de Ω. Soit $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset \Omega$.

Considérons l'arc $\mathcal{C}^1$: $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)x + ty$. On a pour tout $t \in [0,1]$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{L}(y - x)$$

ce qui fournit

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{L}(y - x)$$

Comme Ω est connexe par arcs,

$$\forall (x, y) \in \Omega^2 \quad f(x) - f(y) = \mathrm{L}(y - x)$$

et on en déduit que f est affine. □

Exercice 25.8. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon R non nul. Montrer que sa somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$.

Exercice 25.9 (Inégalité des accroissements finis).

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})$. Soit $(a, b) \in \mathrm{U}^2$ tel que $[a, b] \subset \mathrm{U}$. Montrer

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \nabla f((1-t)a + tb) \cdot (b - a)\mathrm{d}t$$

En déduire

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f((1-t)a + tb)\| \times \|b - a\|$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R}^p)$. Montrer

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} |||\mathrm{d}f_{(1-t)a+tb}||| \times \|b - a\|$$

Solution. **1.** Considérons

$$\varphi : t \in [0,1] \mapsto f((1-t)a+tb) \in \mathbb{R}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\varphi'(t) = \mathrm{d}f_{(1-t)a+tb}(b-a) = \nabla f((1-t)a+tb)\cdot(b-a)$$

ce qui fournit

$$f(b)-f(a) = \varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \nabla f((1-t)a+tb)\cdot(b-a)\mathrm{d}t$$

et on a donc immédiatement par inégalité triangulaire intégrale :

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f((1-t)a+tb)\| \times \|b-a\|$$

2. On considère à nouveau une application $\varphi : t \in [0,1] \mapsto f((1-t)a+tb) \in \mathbb{R}$ et on intègre $\varphi'(t) = \mathrm{d}f_{(1-t)a+tb}(b-a)$:

$$\|f(b)-f(a)\| = \| \int_0^1 \mathrm{d}f((1-t)a+tb)\cdot(b-a)\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |||\mathrm{d}f((1-t)a+tb)|||\times|b-a| \leq \sup_{t\in[0,1]} |||\mathrm{d}f_{(1-t)a+tb}|||\times\|b-a$$

□

Exercice 25.10. $(\mathrm{E}, \|.\|_{\mathrm{E}})$ et $(\mathrm{F}, \|.\|_{\mathrm{F}})$ sont deux e.v.n de dimension finie. Soient U un ouvert convexe de E et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ différentiable en tout point de U.
Montrer

$$f \text{ lipschitzienne } \iff \mathrm{d}f : \mathrm{U} \to (\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}), |||.|||) \text{ bornée}$$

Solution. Condition nécessaire. Soit $\omega \in \mathrm{U}$ et $u \in \mathrm{E}$. Notons L la différentielle de f en ω. Pour $t > 0$ assez petit, $tu \in \mathrm{U} - \omega$ et alors il existe α continue en zéro telle que $\alpha(0) = 0$ et

$$f(\omega+tu) - f(\omega) = \mathrm{L}(tu) + \|tu\|u\alpha(u)$$

et on a quelque chose de semblable pour $t < 0$. Donc si $t \neq 0$,

$$|t|\|\mathrm{L}(u) + \|u\|\alpha(tu)\| \leq \rho|t|\|u\|$$

Finalement

$$\mathrm{V}ert\mathrm{L}(u) + \|u\|\alpha(tu)\| \leq \rho\|u\|$$

$t \to 0$

$$\|\mathrm{L}(u)\| \leq \rho\|u\|$$

donc $|||\mathrm{d}f_\omega||| \leq \rho$. La différentielle de f est bornée sur E. Condition suffisante. Découle de l'inégalité des accroissements finis. □

Exercice 25.11 (Convexité)**.** On se place dans E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. On considère Ω un ouvert convexe de E.

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer

$$f \text{ convexe } \iff \forall (x,y) \in \Omega^2 \quad f(y) \geq f(x) + \mathrm{d}f_x(y-x)$$

2. On suppose de plus E euclidien. Montrer

$$f \text{ convexe } \iff \forall (x,y) \in \Omega^2 \quad \langle \nabla f(y) | y-x \rangle \geq \langle \nabla f(x) | y-x \rangle$$

<u>*Solution.*</u> **1.** Condition nécessaire. Soit $(x,y) \in \Omega^2$. Considérons l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f((1-t)x+ty) \end{array} \right.$$

p est convexe : étant donnés $a, b, \lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} p((1-\lambda)a+\lambda b) &= f(((1-((1-\lambda)a+\lambda b))x+((1-\lambda)a+\lambda b)y) \\ &= f(((1-\lambda)((1-a)x+ay)+\lambda((1-b)x+by)) \\ &\leq (1-\lambda)f((1-a)x+ay)+\lambda f((1-b)x+by) \\ &\leq (1-\lambda)p(a)+\lambda p(b) \end{aligned}$$

donc p est convexe. Plus généralement, on peut aisément démontrer le

Lemme 25.11.1. *Étant donné* U *ouvert convexe de* E*,* $g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *convexe,* F *un* $\mathbb{R}$*-e.v* V *un convexe de* F *et* $\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ *affine vérifiant* $\varphi(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$*, alors* $g \circ \varphi$ *est convexe.*
p est par ailleurs de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$p'(t) = \mathrm{d}f((1-t)x+ty) \cdot (y-x)$$

Notamment

$$p'(0) = \mathrm{d}f_x(y-x)$$

Par convexité

$$p(1) = p(0) + \int_0^1 p'(u)\mathrm{d}u \leq p(0) + p'(0)(1-0) = f(x) + \mathrm{d}f_x(y-x)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (x,y) \in \Omega^2 \quad f(y) \geq f(x) + \mathrm{d}f_x(y-x)}$$

Condition suffisante. Pour $x \in \Omega$ on définit

$$\mathrm{T}_x : \left\{ \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x) + df_x(y-x) \end{array} \right.$$

qui est une fonction affine. On définit ensuite

$$\mathrm{S} : \left\{ \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sup\limits_{x \in \Omega} \mathrm{T}_x(y) \end{array} \right.$$

On a par hypothèse $f(x) + \mathrm{d}f_x(y-x) \leq f(y)$ donc S est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{S} \leq f$. Par ailleurs, $\mathrm{S}(y) \geq \mathrm{T}_y(y) = f(y)$ donc finalement $\mathrm{S} = f$.
Un sup de fonctions convexes est convexe (ici ce sont des fonctions affines ; c'est aisé à démontrer dans le cas général) donc $\boxed{f \text{ est convexe.}}$
Autre preuve en utilisant les dérivées : on note $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{U}\}$ surface de $\mathrm{E} \times \mathbb{R}$ et $\mathrm{H}_{x_0} = \{(y, f(x_0) + \mathrm{d}f_{x_0}(y-x_0)) \mid y \in \mathrm{E}\}$.
H_{x_0} est l'hyperplan de $\mathrm{E} \times \mathbb{R}$ tangent à la surface Γ au point $(x_0, f(x_0))$. T_{x_0} (défini plus haut) approche f au voisinage de x_0.

Condition nécessaire. Soit $(x, y) \in \Omega^2$. On considère à nouveau l'application :

$$p : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f((1-t)x+ty) \end{array} \right.$$

qui est convexe, $\mathcal{C}^1$, donc p' est croissante. Or

$$p'(t) = \mathrm{d}f((1-t)x+ty)\cdot(y-x) = \langle \nabla f((1-t)x+ty) | y-x \rangle$$

et $p'(0) \leq p'(1)$ fournit

$$\boxed{\langle \nabla f(y) | y-x \rangle \geq \langle \nabla f(x) | y-x \rangle}$$

Condition suffisante. On considère cette fois

$$p : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b) - f((1-\lambda)a+\lambda b) \end{array} \right.$$

et notre but est de montrer que p est positive. p est $\mathcal{C}^1$ et

$$p'(\lambda) = f(b) - f(a) - \langle \nabla f((1-\lambda)a+\lambda b) | b-a \rangle$$

Soient $0 \leq \lambda \leq \mu \leq 1$.

$$\begin{aligned} p'(\mu)-p'(\lambda) &= \langle \nabla f((1-\lambda)a+\lambda b) - \nabla f((1-\mu)a+\mu b) | b-a \rangle \\ &= \frac{\langle \nabla f((1-\lambda)a+\lambda b) - \nabla f((1-\mu)a+\mu b) | (\lambda-\mu)(b-a) \rangle}{\lambda-\mu} \\ &= \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\langle \nabla f((1-\lambda)a+\lambda b) | (\lambda-\mu)(b-a)\rangle - \langle \nabla f((1-\mu)a+\mu b) | (\lambda-\mu)(b-a)\rangle\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi p' décroît. Comme $p(0) = p(1) = 0$, selon Rolle, p' s'annule en un point de $[0,1]$. Un tableau de variations atteste que $p \geq 0$. Ainsi $\boxed{f \text{ est convexe.}}$

□

Exercice 25.12. Soit une courbe fermée régulière simple dans le plan. Montrer qu'il existe une droite normale à la courbe en deux points.

Solution. On se place donc dans P plan affine euclidien. On se donne $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{P}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que γ' ne s'annule pas (courbe simple) et γ T-périodique, avec $\gamma_{[0,\mathrm{T}[}$ injective.

On va voir la construction de la binormale comme un problème d'extremum. On pose

$$\mathcal{C} = \gamma(\mathbb{R}) = \gamma([0,\mathrm{T}]).$$

Donc $\mathcal{C}$ est compact, tout comme $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\mathrm{A},\mathrm{B}) & \mapsto & \mathrm{AB} \end{array} \right.$$

est continue donc atteint son maximum sur $\mathcal{C}^2$. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{C}^2$ tel que

$$\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{C}^2 \quad \mathrm{MN} \leq \mathrm{AB}$$

$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ car γ est injective. On note α et β les antécédents de A et B dans $[0,\mathrm{T}[$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\overrightarrow{\gamma(t)} - \overrightarrow{\gamma(\beta)}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{\gamma(\alpha)} - \overrightarrow{\gamma(\beta)}\right\|$$

ce qui peut se réécrire en élevant au carré

$$\langle \gamma(t) - \gamma(\beta) | \gamma(t) - \gamma(\beta) \rangle \leq \langle \gamma(\alpha) - \gamma(\beta) | \gamma(\alpha) - \gamma(\beta) \rangle$$

Considérons donc la fonction p définie sur $[0, \mathrm{T}]$ par $p(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(\beta) | \gamma(t) - \gamma(\beta) \rangle$. p atteint son maximum en α donc $p'(\alpha) = 0$. On a par la règle de la chaîne

$$p'(t) = 2 \langle \gamma'(t) | \gamma(t) - \gamma(\beta) \rangle$$

donc

$$0 = p'(\alpha) = \langle \gamma'(\alpha) | \gamma(\alpha) - \gamma(b) \rangle$$

Le vecteur $\gamma'(\alpha)$ dirige la tangente à $\mathcal{C}$ en le point A et l'égalité précédente fournit $\gamma'(\alpha) \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est normal à $\mathcal{C}$ en A.

La droite (AB) est donc la normale à $\mathcal{C}$ en A, et, par symétrie des rôles de A et B, elle est également la normale à $\mathcal{C}$ en B. (AB) est donc la binormale recherchée. □

Exercice 25.13. On se place dans E un espace affine euclidien de dimension 3. On considère $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de l'espace, d'axes respectifs Δ et Δ'.
Montrer qu'il existe une droite qui coupe $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, Δ et Δ'.
On pourra s'intéresser au couple $(\mathrm{A}, \mathrm{A}') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ *qui maximise* MM' *pour* $(\mathrm{M}, \mathrm{M}') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

Exercice 25.14. Soit γ un arc de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ régulier et T-périodique. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma'(t)$ soit positivement colinéaire à u.

Exercice 25.15 (Laplacien polaire)**.** On considère $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x, y) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le laplacien de f par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Soit

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$$

Exprimer $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ à l'aide des dérivées partielles de g.

Solution. S'ensuit une longue série de calculs avec la règle de la chaîne. D'abord,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

Ensuite, avec le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 r}(r, \theta) = \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + 2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = r^2\sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) - 2r^2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r^2\cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

On a donc

$$\left(r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right)(r,\theta)=r^2(\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)-r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$$

ce qui finalement donne

$$\boxed{\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)}$$

□

Exercice 25.16 (Théorème de Poincaré (?))**.** Soit $f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe une fonction U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\nabla \mathrm{U}=f$ si et seulement si, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,...,n\}$,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

(on dit que f est fermée).

Exercice 25.17. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $0\leq k\leq n$. On note $\mathrm{A}=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{I}_k=\{f\in \mathrm{A}\mid \forall(x_{k+1},...,x_n)\in\mathbb{R}^{n-k},\ f(0,...,0,x_{k+1},...,x_n)=0\}.$$

Montrer que $\mathcal{I}_k$ est l'idéal de A engendré par les fonctions $p_1,...,p_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ où

$$p_i(x_1,...,x_n)=x_i.$$

<u>*Solution*</u>. On exclut le cas $k=0$ ($\mathcal{I}_0=\{0\}=(\varnothing)$). On suppose donc dans la suite $1\leq k\leq n$. L'étude du cas $k=n=1$ permet de fixer les idées :

$$\mathrm{A}=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\qquad \mathrm{I}_1=\{f\in\mathrm{A}\mid f(0)=0$$

Étant donnée $f\in\mathrm{I}_1$, considérons

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}\frac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ f'(0) & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$$

On a alors $f=p_1g$. Montrons que g est $\mathcal{C}^\infty$. Si f est DSE, alors g aussi et c'est le cas. Dans le cas général, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f'(xu)x\mathrm{d}u$$

On pose donc plutôt $g(x)=\int_0^1 f'(xu)\mathrm{d}u$. Le théorème de domination des intégrales à paramètre $\mathcal{C}^\infty$ permet de montre que g est bien dans A.

On revient au cas général. $\mathcal{I}_k$ est clairement un idéal contenant les p_i.
Donnons-nous f dans $\mathcal{I}_k$ et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. En rajoutant un terme nul, puis par télescopage,

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_n) &= f(x_1, ..., x_n) - f(0, ..., 0, x_{k+1}, ..., x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{k} f(0, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - f(0, ..., 0, x_{i+1}, ..., x_n) \\ &= \sum_{i=1} k \int_0^{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, ..., 0, u, x_{i+1}, ..., x_n)\mathrm{d}u \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, ..., 0, tx_i, x_{i+1}, ..., x_n)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i(x)\varphi(x) \end{aligned}$$

où pour $1 \leq i \leq k$

$$\varphi_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, ..., 0, tx_i, x_{i+1}, ..., x_n)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Il reste à vérifier que les φ_i sont $\mathcal{C}^\infty$. Pour cela, on démontre par récurrence le

Lemme 25.17.1. *Soit* $\mathrm{L} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *Alors*

$$\mathrm{M} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \mathrm{L}(x_1, ..., x_n, t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est $\mathcal{C}^\infty$.
Preuve. Par récurrence on montre que M est $\mathcal{C}^p$, en montrant qu'elle est $\mathcal{C}^1$ (théorème de converge dominée pour les intégrales à paramètre $\mathcal{C}^1$ puis en appliquant le résultat à toutes ses dérivées.

$$\boxed{\mathrm{I}_k = (\{p_1, ..., p_k\})}$$

□

Exercice 25.18 (Fonctions homogènes)**.** Soient $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose f différentiable.
Montrer

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ f(tx) = t^\alpha f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \mathrm{d}f_x(x) = \alpha f(x)$$

Solution. CONDITION NÉCESSAIRE. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. L'application

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(tx) \end{array} \right.$$

est continue et dérivable, avec d'une part

$$p'(t) = \mathrm{d}f_{tx}(x)$$

et, puisque $p(t) = t^\alpha f(x)$, d'autre part

$$p'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

ce qui donne en évaluant p' en 1 $\boxed{\mathrm{d}f_x(x) = \alpha f(x).}$

Condition suffisante. Avec des notations évidentes, on pose $p(t) = f(tx) - t^\alpha f(x)$. On a $p(1) = 0$ et

$$\begin{aligned} p'(t) &= \mathrm{d}f_{tx}(x) - \alpha t^{\alpha-1} f(x) \\ &= \frac{1}{t}\left(\underbrace{\mathrm{d}f_x(tx)}_{\alpha f(tx)} - \alpha t^\alpha f(x)\right) \\ &= \frac{\alpha}{t} p(t) \end{aligned}$$

donc p est solution d'un problème de Cauchy dont l'application nulle est solution, donc p est identiquement nulle et $\boxed{f(tx) = t^\alpha f(x).}$ □

Exercice 25.19. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
Montrer que la fonction

$$\mathrm{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta \end{array} \right.$$

est constante.

Solution. La fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ en tant que composées de fonctions $\mathcal{C}^2$. On sait calculer ses dérivées partielles, et on sait exprimer le laplacien de f, en polaires, à l'aide de celles-ci (*cf* Exercice 25.15) :

$$\Lambda f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$$

Pour $r \geq 0$, on a

$$\mathrm{F}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\theta)\mathrm{d}\theta$$

La fonction r est continue d'après ce qui précède, car on intègre sur un segment. Elle est même de classe $\mathcal{C}^2$, ce que l'on vérifie aisément (théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètre). Notamment, pour $r > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r}\underbrace{\left[\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right]_0^{2\pi}}_{=0} + r\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)\mathrm{d}\theta\right) \\
&= -r\mathrm{F}''(r)
\end{aligned}$$

et cette égalité est encore valable en 0 en prolongeant par continuité. Il existe donc $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathrm{F}'(r) = \mathrm{A}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$$

Or

$$\mathrm{A} = \mathrm{F}'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\mathrm{d}\theta = 0$$

Donc $\mathrm{F}'(r) = 0$ pour tout $r \geq 0$. Par conséquent, $\boxed{\text{F est constante.}}$ □

Exercice 25.20. On considère $\mathcal{C}$ un cercle du plan euclidien, et D le disque délimité par $\mathcal{C}$. Soit $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer qu'il existe une unique application $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant

(i) $f_{|\mathrm{C}} = g$

(ii) f continue sur D

(iii) $f_{|\mathring{\mathrm{D}}}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique.

Solution. Notons

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\} \qquad \mathrm{D} = \overline{\Omega}$$

Donnons-nous $f_1, f_2 : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant les trois hypothèses de l'énoncé, et montrons que $f = f_1 - f_2 = 0$. Ainsi on a :

(i) $f_{|\mathrm{C}} = 0$

(ii) f continue sur D

(iii) $f_{|\Omega}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $\Delta f_{|\Omega} = 0$.

On raisonne par l'absurde et on se donne $\omega \in \mathrm{D}$ tel que $f(\omega) > 0$ (quitte à changer f en $-f$). Pour $\varepsilon > 0$, notons

$$f_\varepsilon : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2-1) \end{array}\right.$$

Regardons par exemple $\varepsilon \leq \frac{f(\omega)}{2}$. On a

$$f_\varepsilon(\omega) \geq f(\omega) - \varepsilon \geq \frac{f(\omega)}{2}$$

et donc
$$\max_{(x,y)\in \mathrm{D}} f_\varepsilon(x,y) \geq \frac{f(\omega)}{2} > 0$$

Soit (a,b) tel que f_ε atteint sont maximum en (a,b). D'après ce qui précède, $f(a,b) > 0$. Comme f est nulle sur $\mathcal{C}$, $(a,b) \in \mathcal{C}$. f_ε atteint un maximum global en $(a,b) \in \Omega$, donc $\mathrm{d}f_\varepsilon(a,b) \equiv 0$. Par conséquent,
$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial y}(a,b) = 0$$
Or
$$\Delta f_\varepsilon(a,b) = \underbrace{\Delta f(a,b)}_{0} + 4\varepsilon > 0$$
On peut donc supposer que $\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x^2}(a,b) > 0$. Plaçons-nous alors sur le segment parallèle aux abscisses et passant par b de la façon suivante :
$$p : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\sqrt{1-b^2}, \sqrt{1-b^2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_\varepsilon(x,b) \end{array} \right.$$
p est de classe $\mathcal{C}^2$ et atteint son maximum en a. Au voisinage de a, pour $x \neq a$,
$$p(x) = p(a) + \underbrace{p'(a)}_{0}(x-a) + p''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2$$
$$0 \geq p(x) - p(a) = p''(a)(x-a)^2 > 0$$
car $p''(a) = \frac{\partial^2 f_\varepsilon(a,b)}{\partial x^2}(a,b) > 0$. Absurde. Donc $f = 0$ et $f_1 = f_2$. On a prouvé l'unicité. □

Exercice 25.21. Déterminer le maximum de l'aire d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon $\mathrm{R} > 0$.

Exercice 25.22. Donner l'image de $\mathbb{R}^2$ par
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sin x + \sin y + \sin(x+y) \end{array} \right.$$

Exercice 25.23. Soient et a et b dans $(\mathrm{R}_+^*)^n$. Montrer :
$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^n (a_i+b_i)^{\frac{1}{n}}.$$

Solution. Considérons :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathrm{R}_+^*)^n & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \displaystyle\prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{n}} \end{array} \right.$$
ainsi que
$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto f(a+tb) \in \mathbb{R}_+^*$$
Il existe $c \in]0,1[$ tel que $\gamma'(c) = \gamma(1) - \gamma(0)$. Par ailleurs,
$$\gamma(t) = \prod_{i=1}^n (a_i + tb_i)^{\frac{1}{n}}$$

ce qui fournit

$$\gamma'(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(b_i(a_i+tb_i)^{\frac{1}{n}-1}\prod_{j\neq i}(a_j+tb_j)^{\frac{1}{n}}\right)$$

Par conséquent,

$$f(a+b)-f(a) = \gamma'(c) = \frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n}(a_j+cb_j)^{\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+cb_i} \geq \prod_{j=1}^{n}(a_j+cb_j)^{\frac{1}{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{a_i+cb_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}} = f(b)$$

ce qui traduit

$$\boxed{\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{\frac{1}{n}}}$$

$\square$

Deuxième partie

Algèbre

Chapitre 26

Groupes

Exercice 26.1. Montrer qu'un groupe ne peut être réunion de deux sous-groupes stricts. Plus généralement, si G est un groupe, F et H deux sous-groupes, alors $\mathrm{F} \cup \mathrm{H}$ est un sous-groupe *si et seulement si* $\mathrm{H} \subset \mathrm{F}$ ou $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$.

Solution. CONDITION NÉCESSAIRE. On suppose que $\mathrm{F} \cup \mathrm{H}$ est un sous-groupe de G. Supposons par exemple $\mathrm{H} \not\subseteq \mathrm{F}$. Soit $a \in \mathrm{F}$ et $b \in \mathrm{H} \setminus \mathrm{F}$. $ab \in \mathrm{H}$ (car sinon $b = a^{-1}ab \in \mathrm{F}$ ce qui est faux) donc $a = abb^{-1} \in \mathrm{H}$ et $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$. CONDITION SUFFISANTE. Immédiat. □

Exercice 26.2 (Théorème de Lagrange)**.** Montrer que le cardinal de tout sous-groupe d'un groupe fini divise le cardinal de ce groupe.

Solution. Soit $(\mathrm{G}, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. Considérer la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur G par : $\boxed{x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in \mathrm{H}}$. □

Exercice 26.3. Montrer que si $(\mathrm{G}, \cdot)$ est un groupe fini, $(\mathrm{G}', \cdot)$ un groupe et $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de groupes, alors

$$|\mathrm{G}| = |\operatorname{Im}\varphi| \times |\ker\varphi|$$

Solution. Considérer la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur G par : $\boxed{x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)}$. □

Exercice 26.4. Soient $(\mathrm{G}, +)$ un groupe abélien et $(\mathrm{G}', \times)$ un groupe. Soit φ un morphisme de G vers G′.
Montrer que $(\varphi(\mathrm{G}), \times)$ est isomorphe à $\mathrm{G}/\ker\varphi$.

Solution. C'est une généralisation de l'exercice précédent. Considérer

$$\overline{\varphi} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{G}/\ker\varphi & \to & \operatorname{Im}\varphi \\ \gamma & \mapsto & \varphi(x) \text{ où } x \in \gamma \end{array} \right.$$

□

Exercice 26.5. Soit G un groupe tel que

$$\forall x \in \mathrm{G} \quad x^2 = e$$

Montrer que G est abélien. Si G est fini, montrer que $|\mathrm{G}|$ est une puissance de 2.

Solution. Soient x et y dans G.

$$\begin{aligned} xyxy &= e \\ x^2yxy^2 &= xy \\ yx &= xy \end{aligned}$$

donc G est abélien. □

Exercice 26.6. Soit X un ensemble fini de cardinal impair et f une involution sur X. Montrer que f possède un point fixe.
En déduire que tout groupe de cardinal impair admet un élément d'ordre 2.

Solution. f est une involution : $f^2 = id$ donc f est injective, et surjective, donc bijective. Elle est décomposable en produit de cycles à supports disjoints.

$$f = c_1 \circ \ldots \circ c_l$$

On a donc $c_i^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$ pour $1 \leq i \leq l$ (supports disjoints) et donc c_i est une transposition. Le support de f est donc de cardinal pair. Il existe au moins un point fixe par f.

Si $(\mathrm{G}, \cdot)$ est un groupe de cardinal impair, $x \in \mathrm{G} \mapsto x^{-1}$ est une involution qui possède d'après ce qui précède un point fixe. Cet élément est d'ordre 2. □

Exercice 26.7. Soit G un ensemble muni d'une loi interne associative $\cdot$ ayant un neutre à gauche et pour laquelle tout élément admet un inverse à gauche. Montrer que $(\mathrm{G}, \cdot)$ est un groupe.

Solution. Soit $(\mathrm{G}, \cdot)$ un tel ensemble. On note e le neutre à gauche. Soit $x \in \mathrm{G}$, y son inverse à gauche, z l'inverse à gauche de y :

$$yx = e \qquad zy = e$$

Donc

$$xy = (zy)(xy) = z(yx)y = zey = zy = e$$

On a montré que pour tout élément $x \in \mathrm{G}$, son inverse à gauche commutait avec lui. Notons x^{-1} cet inverse à gauche.

Montrons que e est aussi neutre à droite. Soit $x \in \mathrm{G}$. Par définition $ex = x$. Or

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

donc

$$xe = x(x^{-1}x) = (xx^{-1})x = e.x = x$$

Donc e est bien un neutre à droite. Conclusion : $(\mathrm{G}, \cdot)$ est bien un groupe. □

Exercice 26.8 (Théorème de Cayley)**.** Montrer qu'un groupe de cardinal fini n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Solution. Considérer le morphisme de groupes qui à un élément a de G associe la transposition par a. □

Exercice 26.9. Quels sont les sous-groupe finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$?

Solution. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ de cardinal n et $z \in \mathrm{G}$. Alors $z^n = 1$ donc $z \in \mathbb{U}_n$. D'où $\mathrm{G} \subset \mathrm{U}_n$ et finalement, par égalité des cardinaux, $\boxed{\mathrm{G} = \mathrm{U}_n}$. □

Exercice 26.10. Montrer que les morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont les exponentielles.

Solution. Soit φ un tel morphisme. L'application $\ln \circ \varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ est un morphisme continu et on dispose donc de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln \circ \varphi = \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. □

Exercice 26.11. Soit $(\mathrm{G}, \cdot)$ un groupe fini.

1. On suppose que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{G}, \cdot)$ possède au plus un sous-groupe de cardinal d. Montrer que $(\mathrm{G}, \cdot)$ est cyclique.
2. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Montrer que tout sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$ est cyclique.
3. Quels sont les sous-groupes finis de $(\mathbb{K}, \times)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}[i]$ et $\mathbb{Q}\left[e^{\frac{2i\pi}{3}}\right]$?

Solution.

1. On note N le cardinal de G.

$$\mathrm{G} = \bigsqcup_{d \mid \mathrm{N}} \mathrm{A}_d \text{ où } \mathrm{A}_d = \{x \in \mathrm{G} \mid \omega(x) = d\}$$

Si $\mathrm{A}_d \neq \varnothing$, G possède un élément d'ordre d, donc un sous-groupe cyclique d'ordre d et c'est donc le seul par hypothèse. Dans ce cas, $|\mathrm{A}_d| = \varphi(d)$. Alors,

$$\mathrm{N} = \sum_{\substack{d \mid \mathrm{N} \\ \mathrm{A}_d \neq \varnothing}} |\mathrm{A}_d| = \sum_{\substack{d \mid \mathrm{N} \\ \mathrm{A}_d \neq \varnothing}} \varphi(d) \leq \sum_{d \mid \mathrm{N}} \varphi(d) = \mathrm{N}$$

Les inégalités sont donc des égalités et quel que soit d divisant N, G possède un élément d'ordre d, notamment il en existe un d'ordre N, donc G est cyclique.

2. Étant donné H un sous-groupe donné de cardinal d dans $(\mathbb{K}^*, \times)$, il est clair que $\mathrm{H} \subset \{b \in \mathbb{K} \mid b \text{ racine de } \mathrm{X}^d - 1\} = \Omega_d$ sous-groupe de $(\mathbb{K}^*, \times)$ de cardinal d (puisque $\mathbb{K}$ corps). Alors $\mathrm{H} = \Omega_d$.
3. — Pour $\mathbb{R}$, $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$.
   — Pour $\mathbb{C}$, les racines n-ièmes de l'unité ($n \in \mathbb{N}^*$.
   — Pour $\mathbb{Q}[i]$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$ et $\{-1, 1, i, -i\}$.
   Lemme 26.11.1. *Soit $z \in \mathbb{Q}[i]$. z s'écrit de façon unique sous la forme $z = \frac{a+ib}{c}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b \wedge c = 1$.*

□

Exercice 26.12 (Groupes quasi-cycliques de Prüfer - Ulm)**.** Pour $p \in \mathbb{P}$, on note U_p le groupe généré par $\left\{\exp\left(\frac{2i\pi}{p^\alpha}\right) \mid \alpha \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que U_p est *indécomposable*, c'est-à-dire non isomorphe à un produit direct de deux groupes non triviaux.

Solution. On démontre aisément que

$$\mathrm{U}_p = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_{p^\alpha}$$

Les sous-groupes de U_p sont les $\mathbb{U}_{p^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$. Ainsi l'ensemble des sous-groupes de U_p est ordonné pour l'inclusion.

En effet, soit G un sous-groupe de U_p qui ne soit pas un $\mathbb{U}_{p^\alpha}$.

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^* \quad \exists x \in \mathrm{G} \quad x \notin \mathbb{U}_{p^\alpha}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathrm{G}$ avec $x \notin \mathbb{U}_{p^\alpha}$. Posons $n = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid x \in \mathbb{U}_{p^k}\}$. On constate que $\alpha < n$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \exp\left(\frac{2i\pi k}{p^n}\right)$. Par définition de n,

$$x^{p^{n-1}} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{p}\right) \neq 1$$

et donc p ne divise pas k. Comme p est premier, $p \wedge k = 1$ d'où $p^n \wedge k = 1$ et donc $\mathbb{U}_{p^n} = <\{x\}>$. Ainsi $\mathbb{U}_{p^\alpha} \subset <\{x\}> \subset \mathrm{G}$ et donc

$$\mathrm{U}_p = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_{p^\alpha} \subset \mathrm{G} \subset \mathrm{U}_p$$

L'ensemble des sous-groupes de U_p est ainsi ordonné pour l'inclusion.

Si H et K sont deux groupes et φ un morphisme de $\mathrm{H} \times \mathrm{K}$ dans U_p, alors $\tilde{\mathrm{H}} = \mathrm{H} \times \{1\}$ et $\tilde{\mathrm{K}} = \{1\} \times \mathrm{K}$ sont deux sous-groupes de $\mathrm{H} \times \mathrm{K}$ d'intersection $\{1\} \times \{1\}$. Comme φ est un isomorphisme, $\varphi(\tilde{\mathrm{H}}) \cap \varphi(\tilde{\mathrm{K}}) = \{1\}$ et donc $\varphi(\tilde{\mathrm{H}}) = \{1\}$ ou $\varphi(\tilde{\mathrm{K}}) = \{1\}$ d'où $\mathrm{H} = \{1\}$ ou $\mathrm{K} = \{1\}$. □

Exercice 26.13 (Ulm)**.** Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Solution. Les groupes finis conviennent, nous allons montrer que ce sont les seuls.

Soit G un groupe dont l'ensemble $\mathcal{G}$ des sous-groupes est fini. Soit $x \in \mathbb{G}$. L'ordre de x est fini. Sinon, x génère un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ qui possède une infinité de sous-groupes.

On note $\mathcal{G}'$ l'ensemble des sous-groupes monogènes de G. Cet ensemble est fini, et $\mathrm{G} = \bigcup_{\mathrm{H} \in \mathcal{G}'} \mathrm{H}$.

Conclusion : $\boxed{\text{G est fini}}$. □

Exercice 26.14 (Ulm)**.** Soit G un groupe fini et f un morphisme de G dans G. Montrer que

$$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

Solution. En utilisant le résultat de l'exercice 26.3, et en remarquant que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ et $\ker f \subset \ker f^2$, c'est immédiat en utilisant l'égalité des cardinaux. □

Exercice 26.15. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ de cardinal n.

Solution. Les $\left\{\overline{0}, \overline{\left(\frac{1}{n}\right)}, ..., \overline{\left(\frac{n-1}{n}\right)}\right\}$ où $n \geq 1$ semblent être les sous-groupes cherchés.

Soient $n \geq 1$ et H un sous-groupe de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ de cardinal n. Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $\overline{x} \in \mathrm{H}$. Alors $n\overline{x} = 0$ d'où $\overline{nx} = 0$. On dispose donc de $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{p}{n}$. Finalement, par division euclidienne de p par n, $\overline{x} = \overline{\left(\frac{r}{n}\right)}$ où $0 \leq r \leq n-1$. Ainsi $\mathrm{H} \subset \left\{\overline{0}, \overline{\left(\frac{1}{n}\right)}, ..., \overline{\left(\frac{n-1}{n}\right)}\right\}$, et l'égalité des cardinaux fournit l'autre inclusion. □

Exercice 26.16. Quels sont les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$?

Solution. Soit f un morphisme de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$. $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. On dispose ainsi de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im} f = n\mathbb{Z}$.

Si $n \geq 1$, soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) = n$. Donc $2 \underbrace{f\left(\frac{x}{2}\right)}_{\in \mathbb{Z}} = n$ et finalement $\frac{n}{2} \in \operatorname{Im} f$, c'est absurde. Donc $n = 0$ et $\boxed{f \text{ est l'application nulle}}$. □

Exercice 26.17 (Exposant d'un groupe abélien fini)**.** Soit G un groupe abélien fini.

1. Montrer que si $(x,y) \in \mathrm{G}^2$ et $\omega(x) \wedge \omega(y) = 1$ alors $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$.
2. Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $(m',n') \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $m' \wedge n' = 1$, $m'|m$, $n'|n$ et $m'n' = m \vee n$.
3. Montrer qu'il existe $z \in \mathrm{G}$ tel que $\omega(z) = \bigvee_{x \in \mathrm{G}} \omega(x)$ appelé exposant de G.

Solution. **1.** On note $m = \omega(x)$ et $n = \omega(y)$. Il est clair que $\omega(xy)|mn$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(xy)^k = 1$ Alors $1 = (xy)^{km} = y^{km}$ donc $\omega(y)|km$ et (Gauss) $\omega(y)|k$. De même, $\omega(x)|k$. Finalement (Gauss) : $\omega(x)\omega(y)|\omega(xy)$ et $\boxed{\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)}$.

2. Avec la décomposition en facteurs premiers de m et n, on sait que

$$n \vee m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(\nu_p(n),\nu_p(m))}$$

Les entiers m' et n' sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucun diviseur premier en commun. $m'|m$ si et seulement si $\forall p \in \mathbb{P}\ \nu_p(m') \leq \nu_p(m)$, de même pour n et n'. Enfin, $m'n' = m \vee n$ si et seulement si $\nu_p(m') + \nu_p(n') = \max(\nu_p(n), \nu_p(m))$ ce qui nous conduit à poser

$$m' = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha_p} \quad \text{où } \alpha_p = \begin{cases} \nu_p(m) & \text{si } \nu_p(m) > \nu_p(n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$n' = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\beta_p} \quad \text{où } \beta_p = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu_p(m) > \nu_p(n) \\ \nu_p(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

Les entier n' et m' ainsi définis vérifient toutes les conditions voulues. [1]

3. Soit $z \in \mathrm{G}$ d'ordre maximal, noté m. Soit $x \in \mathrm{G}$ d'ordre n. Soient m' et n' les entiers de la question précédente.
L'ordre de $z^{\frac{m}{m'}}$ est m', celui de $x^{\frac{n}{n'}}$ est n'. Si k est tel que $(z^{\frac{m}{m'}})^k = 1$ alors $\frac{mk}{m'} \geq m$ et donc $k \geq m'$. La première question fournit $\omega(z^{\frac{m}{m'}} x^{\frac{n}{n'}}) = m'n' = m \vee n = m$ par maximalité de m. Donc m est multiple de tous les ordres, tout en étant minimal. $\boxed{\omega(z) = \bigvee_{x \in \mathrm{G}} \omega(x)}$ □

Exercice 26.18 (Sous-groupes finis de $(\mathrm{K}^*, \times)$.)**.** Montrer, à l'aide des résultats de l'exercice précédent, que si K est un corps commutatif et G un sous-groupe fini de $(\mathrm{K}^*, \times)$, alors G est cyclique.

1. Attention ! ces deux entiers n' et m' n'ont rien à voir avec $\frac{n}{n \wedge m}$ et $\frac{m}{n \wedge m}$...

Solution. Soit $z \in \mathrm{G}$ tel que $\omega(z)$ soit l'exposant de G, que l'on note m. On note n le cardinal de G. On a $m \geq n$. Par définition de l'exposant,

$$\mathrm{G} \subset \{x \in \mathrm{G} \mid x^m - 1 = 0\}$$

et donc le degré du polynôme $\mathrm{X}^m - 1$ est supérieur ou égal à n. Finalement $n = m$ et $\boxed{\mathrm{G} = <\{x\}>}$.

□

Exercice 26.19 (Génération du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$)**.** Quel est le nombre minimal de transpositions engendrant $\mathfrak{S}_n$?

Solution. Deux démonstrations sont possibles. L'une s'appuie sur le lemme suivant tandis que l'autre transpose le problème aux graphes connexes.

Lemme 26.19.1. *Soient* G *un ensemble de transpositions générateur de* $\mathfrak{S}_n$*, et* $\varnothing \subsetneq \mathrm{A} \subsetneq [\![1, n]\!]$*. Il existe* $(i, j) \in \mathrm{A} \times [\![1, n]\!] \setminus \mathrm{A}$ *tel que* $\tau_{ij} \in \mathrm{G}$.

Lemme 26.19.2. *Si un graphe* G *sur un ensemble* E *de cardinal* $n \geq 2$ *est connexe, alors il possède au moins* $n - 1$ *arrêtes.*

□

Exercice 26.20 (Lemme de Cauchy)**.**

1. Question préliminaire : Soit G un groupe fini, de cardinal $|\mathrm{G}| = p^m$ où $p \in \mathbb{P}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, opérant sur E un ensemble non vide et fini. On note
$$\mathrm{E}_\mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E} \mid \forall g \in \mathrm{G}\ g \cdot x = x\}$$
Montrer que $|\mathrm{E}_\mathrm{G}| \equiv |\mathrm{E}|\ [p]$.
2. Lemme de Cauchy : Soit H un groupe fini d'ordre n et $p \in \mathbb{P}$ avec $p | n$. Montrer que H possède un élément d'ordre p.
3. Application : Soit H un groupe fini de cardinal n et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in \mathrm{H}\ x^m = e$. Montrer que n divise une puissance de m.

Solution. **1.** Pour $x \in \mathrm{E}$ on note Ω_x l'orbite de x. Ainsi $\mathrm{E}_\mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E} \mid \Omega_x = \{x\}\}$. On note G_x le stabilisateur de x : $\mathrm{G}_x = \{g \in \mathrm{G} \mid g \cdot x = x\}$. Soient g et g' dans G.

$$g \cdot x = g' \cdot x \Longleftrightarrow (g^{-1}g') \cdot x = x \Longleftrightarrow g^{-1}g' \in \mathrm{G}_x \Longleftrightarrow g' \in g\mathrm{G}_x$$

Donc
$$|\Omega_x| = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{G}_x|}$$

Soient Ω_1, ... , Ω_k les différentes orbites pour l'action de G sur E non réduites à un singleton. Comme les stabilisateurs sont des sous-groupes de G, on a $|\Omega_i| \equiv 0\ [p]$. Ainsi on a

$$|\mathrm{E}| = |\mathrm{E}_\mathrm{G}| + \sum_{i=1}^{k} |\Omega_i| \qquad \text{(Équation aux classes)}$$

et donc $\boxed{|\mathrm{E}| \equiv |\mathrm{E}_\mathrm{G}|\ [p]}$.

2. On note e le neutre de H. On considère l'ensemble

$$\mathrm{E} = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathrm{H}^p \mid x_1 ... x_p = e\}$$

qui est non vide puisqu'il contient $(e, ..., e)$. Son cardinal est n^{p-1}.
On fait agir sur E le sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ généré par le cycle $(1, ..., p)$, que l'on note K, isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On définit l'action de K sur E par $c \cdot (x_1, ..., x_p) = (x_{c(1)}, ..., x_{c(p)})$. E est bien stable par $\cdot$. Il est clair que

$$\mathrm{E_K} = \{(x, ..., x) \mid x \in \mathrm{H} \text{ et } x^p = e\}$$

D'après la question précédente, $0 \equiv |\mathrm{E}| \equiv |\mathrm{E_K}|\ [p]$. Or $\mathrm{E_K} \neq \varnothing$ puisque $(e, ..., e) \in \mathrm{E_K}$. Donc $|\mathrm{E}_p| \geq p$ et $\boxed{\text{H possède au moins } p-1 \text{ éléments d'ordre } p}$.

3. La décomposition en facteur premiers $n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$ et le lemme de Cauchy permettent d'affirmer que H possède des éléments d'ordre $p_1, ..., p_r$. Donc $p_1|m, ..., p_r|m$.

□

Exercice 26.21 (Théorème de Wedderburn)**.** Soit $(\mathrm{A}, +, \times)$ un anneau divisant fini. Montrer que A est un corps.

(Assez chaud)

Exercice 26.22 (Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$)**.** Soit $n \neq 6$ un entier naturel. Montrer que les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs.

Solution. Soit φ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$. Étant donné que l'on sait que les transpositions génèrent $\mathfrak{S}_n$, il suffit de s'intéresser à l'image des transpositions par φ.

Soit donc τ une transposition. $\varphi(\tau)$ est d'ordre 2, mais cela ne suffit pas pour conclure (considérer un produit de transpositions à supports disjoints). Pour $2k \leq n$, on note T_k l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui se décomposent en exactement k transpositions à supports disjoints.

(...) □

Chapitre 27

Anneaux et corps

Pour montrer qu'un ensemble E*est un corps, (style les corps de nombres) penser à exhiber un morphisme d'algèbre (cela fournit que* E *est un anneau et un espace vectoriel) ; puis à montrer que tous les éléments de l'ensemble sont inversibles. Gain de temps assuré.*

Exercice 27.1 (Corps $\mathbb{R}$)**.** Quels sont les automorphismes du corps $\mathbb{R}$?

Exercice 27.2 (Anneaux tels que $x^3 = x$.)**.** Soit A un anneau tel que

$$\forall x \in \mathrm{A} \quad x^3 = x$$

1. Quels sont les éléments nilpotents de A ?

2. Soit $e \in \mathrm{A}$ tel que $e^2 = e$. Soit $a \in \mathrm{A}$ et $b = ea(1-e)$. Calculer b^2 et en déduire que $ea = ae$. En déduire que

$$\forall x \in \mathrm{A} \quad x^2 \in \mathrm{Z}(\mathrm{A})$$

3. Montrer que A est commutatif.

Des variantes de cette exercice existent : anneau A *vérifiant pour tout x dans* A*, $x^2 = x$, anneau* A *vérifiant pour tout x dans* A*, $x^6 = x$... Dans les deux cas,* A *est commutatif.*

Exercice 27.3 (Anneaux réguliers)**.** Un anneau A est dit régulier si

$$\forall a \in \mathrm{A} \quad \exists\, u \in \mathrm{A} \quad aua = a$$

1. Montrer qu'un corps est régulier

2. Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas régulier

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit régulier

4. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer que $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est régulier.

5. Montrer que le centre d'un anneau régulier est régulier.

On rappelle qu'un anneau est dit principal lorsqu'il est intègre et que tous ses idéaux sont principaux.

Exercice 27.4 (Idéaux principaux)**.** Soit A un anneau commutatif. $a, b \in \mathrm{A}$. Montrer que si $(a) + (b)$ est principal, alors $(a) \cap (b)$ aussi.

Solution. Posons $d = a \wedge b$, $a = \alpha d$ et $b = \beta d$. (On s'inspire du cas $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$.) Considérons $m = d\alpha\beta$ et montrons que $(m) = (a) \cap (b)$. La première inclusion est immédiate si l'on y réfléchit bien, puisque $m = \alpha b = \beta a$. Soit $x \in (a) \cap (b)$. Avec des notations évidentes, $x = \gamma a = \delta b$. Or $d = \lambda a + \mu b$. Ainsi

$$x = \gamma\alpha(\lambda a + \mu b) = \gamma\alpha\lambda a + \mu\gamma m = \alpha\lambda x + \mu\gamma m = \alpha\lambda\delta b + \mu\gamma m = (\lambda\delta + \mu\gamma)m$$

Conclusion : $\boxed{(a) \cup (b) \text{ est principal}}$. □

Exercice 27.5 (Anneaux principaux : anneau des décimaux)**.** Montrer que

$$\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists\, n \in \mathbb{Z}\ 10^n x \in \mathbb{Z}\}$$

est principal.

Solution. La démonstration se base sur la remarque importante suivante : si $x \in \mathrm{D}$, x s'écrit

$$x = 2^\alpha 5^\beta p$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ premier avec 10, car le dénominateur de x n'admet que 5 et 2 comme diviseurs.

Soit I un idéal de D. Soit $x \in \mathrm{I}$. $x = 2^\alpha 5^\beta p$ comme décrit précédemment. $2^{-\alpha}5^{-\beta} \in \mathrm{D}$ donc $|p| \in \mathrm{I} \cap \mathrm{N}^*$, ensemble possédant un plus petit élément noté a. On montre à l'aide de la division euclidienne (pour l'inclusion réciproque) que $\boxed{a\mathrm{D} = \mathrm{I}}$. □

Exercice 27.6 (A[X]**.** principal] Soit A un anneau commutatif. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A[X] soit principal.

Exercice 27.7 (Anneaux factoriels)**.** Soit A un anneau intègre.
Un élément $p \in \mathrm{A}^*$ est dit irréductible si $p \notin \mathrm{A}^\times$ et si pour toute écriture $p = uv$ avec $(u, v) \in \mathrm{A}^2$, on a $u \in \mathrm{A}^\times$ ou $v \in \mathrm{A}^\times$.
Si $(a, b) \in \mathrm{A}^2$, a et b sont dits associés si $a = ub$ avec $u \in \mathrm{A}^\times$. «Être associés» est une relation d'équivalence sur A.
A est dit factoriel si tout $a \in \mathrm{A}^*$ peut s'écrire

$$a = up_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$$

avec u inversible, les p_i irréductibles deux à deux non associés, et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. De plus cette écriture est unique au sens suivant : si $a = vq_1^{\beta_1}...q_s^{\beta_s}$ avec v inversible, les q_i irréductibles deux à deux non associés, les $\beta_i \in \mathbb{N}^*$, on a $r = s$ et quitte à renuméroter les q_i, p_i et q_i sont associés et $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Montrer qu'un anneau principal est factoriel.

Solution. On raisonne par l'absurde. On se donne A un anneau principal dont un élément $a \in \mathrm{A}$ n'admet pas de décomposition factorielle, tout en n'étant ni irréductible, ni inversible ; soient $u, v \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{A}^\times$ tels que

$$a = uv$$

u et v n'admettent pas de décomposition. On pose $a_0 = a$ et $a_1 = u$. $a_1 | a$ et non associé à a puisque $v \notin \mathrm{A}^\times$.

On réitère : on dispose de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments n'admettant pas de décomposition factorielle, telle que $a_{n+1} | a_n$ et non associé à a_n. On pose alors

$$\mathrm{I}_n = a_n\mathrm{A}$$

Pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}_{n+1}$ et l'inégalité est stricte, sinon il existe $u, v \in \mathrm{A}$ tels que $a_n = ua_{n+1}$ et $a_{n+1} = va_n$ d'où $a_{n+1}(1 - vu) = 0$ et $vu = 1$, a_n et a_{n+1} associés, c'est absurde.

On montre ensuite que

$$\mathrm{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$$

est un idéal de A. Ce n'est pas vrai en général, mais ici ça l'est par croissance des (I_n).

On dispose donc de $b \in \mathrm{I}$ tel que $b\mathrm{A} = \mathrm{I}$. Soit n_0 tel que $b \in \mathrm{I}_{n_0}$. Alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$b\mathrm{A} \subset \mathrm{I}_{n_0} \subset \mathrm{I}_{\mathrm{N}} \subset b\mathrm{A}$$

donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n_0}$; absurde dès que $n > n_0$. Donc $\boxed{\text{tout élément de A admet une décomposition factorielle.}}$

Il reste à prouver l'unicité d'une telle décomposition. Soient $a \in \mathrm{A}^*$ et $(u, v) \in \mathrm{A}^\times$, $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, $p_1, ..., p_r, q_1, ..., q_s$ irréductibles et $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_r$ entiers naturels tels que

$$a = up_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r} = vq_1^{\beta_1} ... q_s^{\beta_s}$$

Montrons par récurrence sur $\alpha_1 + ... + \alpha_r$ que $r = s$ et que, quitte à renuméroter, p_i est associé à q_i, et que tous les exposants sont alors égaux.

Si $\alpha_1 + ... + \alpha_r = 0$ alors a est inversible et donc nécessairement $s = 0$, car sinon q_1 serait inversible. On suppose à présent $\alpha_1 + ... + \alpha_r \geq 1$ tel que la propriété soit vraie au rang précédent, c'est-à-dire pour toute décomposition avec une somme d'exposants égale à $\alpha_1 + ... + \alpha_r - 1$. On prouve d'abord le

Lemme 27.7.1 (Euclide)**.** *Soit p irréductible divisant ab avec $a, b \in \mathrm{A}$. Alors $p|a$ ou $p|b$.*

Preuve. Considérons l'idéal $\mathrm{I} = p\mathrm{A} + b\mathrm{A}$. Soit $c \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{I} = c\mathrm{A}$. c divise p, qui est irréductible, donc

— ou bien c est inversible, auquel cas $\mathrm{I} = \mathrm{A}$ et $1 = pu + bv$ $(u, v \in \mathrm{A})$ d'où $a = apu + abv$ et donc $p|a$;

— ou bien c est associé à p et alors $\mathrm{I} = p\mathrm{A}$ or $b \in \mathrm{I}$ donc $p|b$.

Revenons à la démonstration. p_r divise un des facteurs $q_1, ..., q_s$ ou v, mais ce dernier est inversible, donc ce n'est pas possible, car sinon p_r serait inversible. Quitte à renuméroter et à changer v, on suppose que p_r divise q_s, auquel cas $p_r = q_s$ (puisqu'ils sont tout deux irréductibles) et

$$\frac{a}{p_r} = up_1^{\alpha_1} ... p_{r-1}^{\alpha_{r-1}} p_r^{\alpha_r - 1} = vq_1^{\beta_1} ... q_{s-1}^{\beta_{s-1}} q_s^{\beta_s - 1}$$

Deux cas sont alors à distinguer.

— Si $\alpha_r - 1 > 0$ alors p_r divise un des q_i, ce ne peut être que q_s, donc $p_r | q_s^{\beta_s - 1}$.

— Si $\alpha_r = 1$ alors $\beta_s = 1$, sinon $q_s = p_r$ divise un des q_j, $1 \leq j \leq s - 1$, c'est impossible.

On applique l'hypothèse de récurrence à $\frac{a}{p_r}$, ce qui donne $r - 1 = s - 1$, et quitte à renuméroter, $p_i = q_i$ pour $i > r$ et $\alpha_i - 1 = \beta_i - 1$. La récurrence se propage. □

Exercice 27.8 (Anneaux euclidiens)**.** Soit A un anneau intègre. On dit que A est euclidien lorsqu'il existe une application $\varphi : \mathrm{A}^* \to \mathbb{N}$ tel que, pour $a \in \mathrm{A}$ et $b \in \mathrm{A}^*$, il existe $(q, r) \in \mathrm{A}^2$ tel que

$$a = bq + r \text{ et } (r = 0 \text{ ou } \varphi(r) < \varphi(b))$$

1. Donner des exemples d'anneaux euclidiens.

2. Montrer qu'un anneau euclidien est principal.

Ainsi, pour A *anneaux commutatif et intègre,*

$$\boxed{\mathrm{A} \textit{ euclidien } \Rightarrow \mathrm{A} \textit{ principal } \Rightarrow \mathrm{A} \textit{ factoriel}}$$

Exercice 27.9 (Entiers de Gauss)**.** On définit

$$\mathbb{Z}[i] = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$$

ainsi que

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[i] & \to & \mathbb{N} \\ a & \mapsto & a\overline{a} \end{array} \right.$$

1. Décrire le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

2. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien pour φ.

3. En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ est factoriel.

Exercice 27.10. **1.** Montrer que

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

2. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

3. Déterminer les sous-corps de $\mathbb{C}$ qui sont isomorphes $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Exercice 27.11. Soit A un anneau commutatif. Montrer que A est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont A et $\{0\}$.

Chapitre 28

Arithmétique

Exercice 28.1 (Théorème chinois)**.** Soient $n_1, ..., n_p$ des entiers de $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ 2 à 2 premiers entre eux et $b_1, ..., b_p$ des entiers relatifs. Montrer que l'ensemble des solutions du système

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & \equiv & b_1 & [n_1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & \equiv & b_p & [n_p] \end{array}\right.$$

est une classe modulo $n_1 n_2 ... n_p$.

Solution. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système de congruence. Montrons d'abord que $\mathrm{S} \neq \varnothing$. Construisons $x_i \in \mathbb{Z}$ tel que $x_i \equiv 1\,[n_i]$ et $x_i \equiv 0\,[n_j]$ si $j \neq i$. On prend $i = 1$ pour fixer les idées.

n_1 est premier avec $n_2, ..., n_p$ donc il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $un_1 + v(n_2...n_p) = 1$. On prend $x_1 = v(n_2...n_p) = 1 - un_1$ qui répond au problème. On construit de même $x_2, ..., x_p$.

Par conséquent,

$$x = \sum_{i=1}^{p} b_i x_i$$

est une solution particulière du problème. Soit $y \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} &\iff \forall i \in \{1, ..., p\} \quad y \equiv b_i\ [n_i] \\ &\iff \forall i \in \{1, ..., p\} \quad y \equiv x\ [n_i] \\ &\iff \forall i \in \{1, ..., p\} \quad n_i | y - x \\ &\iff y \in x + n_1...n_p\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S} = x + n_1...n_p\mathbb{Z}}$$

□

Exercice 28.2. Montrer qu'il existe un multiple de 23 qui ne s'écrit qu'avec des 1 en base 10.

<u>*Solution.*</u> [1] Soit $n_k = 111....1111$ (k fois le chiffre 1 en base 10). On considère la division euclidienne par 23 : $n_k = q_k \times 23 + r_k$ avec $0 \leq r_k \leq 22$. Or l'application

$$k \mapsto r_k$$

n'est pas injective : On dispose de $l < m \in \mathbb{N}$ tels que $r_l = r_m$. Alors

$$23 | n_m - n_l = 1111..1110000...000 = n_{m-l}.10^l.$$

□

Exercice 28.3. Soit p un entier premier, k non nul et $i \in \{1, ..., p^{k-1}\}$. Déterminer la valuation p-adique de $\binom{p^k}{i}$.

<u>*Solution.*</u> On a

$$i!\binom{p^k}{i} = p^k(p^k - 1)...(p^k - i + 1)$$

et si $\lambda \in \{1, ..., i-1\}$ il est facile de montrer que $\nu_p(p^k - \lambda) = \nu_p(\lambda)$.

Finalement,

$$\nu_p(i!) + \nu_p\left(\binom{p^k}{i}\right) = \nu_p((i-1)!) + k$$

et donc

$$\boxed{\nu_p\left(\binom{p^k}{i}\right) = k - \nu_p(i)}$$

□

Exercice 28.4 (Ulm)**.** Montrer que pour tout $n \geq 2$ le dénominateur réduit de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est pair.

<u>*Solution.*</u> L'ensemble

$$\{\nu_2(k) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

est non vide et admet un maximum α. Montrons que celui-ci est atteint en un unique k en raisonnant par l'absurde. Soient k et k' dans $\{1, ..., n\}$ distincts avec

$$k = 2^\alpha(2s + 1) \text{ et } k' = 2^\alpha(2r + 1)$$

où $s < r$. Mais dans ce cas $2^\alpha(2s + 2) = 2^{\alpha+1}(s + 1)$ est dans $]\!]s, r[\![\neq \varnothing$, de valuation 2-adique strictement supérieure à α.

Finalement

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{\mathrm{A}}{2^\alpha \mathrm{B}}$$

où A et B sont impairs.

En remplaçant $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par $\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k}$ on peut, en adaptant légèrement la preuve précédente, montrer que cette somme n'est pas entière si $m \geq n \geq 2$.

□

Exercice 28.5. Soit p un nombre premier, $p \geq 3$.
Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*)$ est cyclique en utilisant l'exposant d'un groupe abélien fini (voir l'exercice 26.17).

1. Solution proposée par Maxime Bombar.

Solution. Soit d un diviseur de $p-1$. Un élément $x \in \mathrm{G}$ est d'ordre d si et seulement si il est racine du polynôme $\mathrm{X}^d - 1$.

Notons m l'exposant de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Il existe $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ élément d'ordre m (d'après l'exercice 26.17). Alors tout élément y de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est racine de $\mathrm{X}^m - 1$. Or $m|p-1$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, donc $m = p-1$ et le résultat est prouvé. □

Exercice 28.6 (Résidus quadratiques)**.** Soit $p \geq 3$ un nombre premier. On appelle résidu quadratique toute classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui est un carré.

1. Dénombrer les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

2. Soit $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Montrer

$$a \text{ carré } \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$$

3. Montrer que $\overline{-1}$ est un résidu quadratique si et seulement si $p \equiv 1\,[4]$.

Solution. **1.** Soient x et y dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

$$x^2 = y^2 \iff x^2 - y^2 = \overline{0} \iff (x-y)(x+y) = \overline{0} \iff y \in \{-x, x\}$$

Ainsi, si l'on considère

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* & \to & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

alors on peut ranger par paires les éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ selon leur image par φ.

$\boxed{\text{Il y a } \frac{p-1}{2} \text{ carrés dans } (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*.}$

2. L'ensemble des carrés de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est un sous-groupe de cardinal $\frac{p-1}{2}$ de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Si a est un carré, le petit théorème de Fermat assure $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$. Réciproquement, si $a^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$, alors a est racine de $\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} - 1$ qui admet les carrés pour racines et est de degré $\frac{p-1}{2}$ dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il y a donc identité entre les racines de $\mathrm{X}^{\frac{p-1}{2}} - 1$ et les carrés, et finalement a en est un.

3. On applique ce qui précède à $a = \overline{-1}$. La condition nécessaire est $\frac{p-1}{2}$ pair, c'est-à-dire $p \equiv 1\,[4]$. Cette condition est suffisante.

□

Exercice 28.7 (Théorème de Wilson)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$p \text{ premier } \iff (p-1)! \equiv -1\ [p]$$

Solution. Considérer l'involution $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p, x \mapsto x^{-1}$. □

Exercice 28.8. Soit p un entier premier supérieur ou égal à 5.
Montrer

$$p \equiv 1\,[3] \iff \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1 \text{ possède une racine dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Solution. Condition nécessaire. Supposons que $p-1$ est divisible par 3. On remarque que

$$\mathrm{X}^3 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$$

Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est cyclique, il possède un élément d'ordre 3. $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ possède une racine.

Condition suffisante. Si $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ possède une racine, alors l'écriture précédente permet d'affirmer l'existence d'un élément d'ordre 3. Le théorème de D'Alembert assure $3|p-1$. □

Exercice 28.9. Soit p premier supérieur ou égal à 5. Soit n le plus petit résidu non quadratique modulo p. Montrer que $n < \sqrt{p} + 1$.

Solution. Soit m le plus petit entier tel que $mn > p$. On remarque que cela impose $mn - n < p$ et donc $p < mn < p+n$ ce qui donne en passant aux classes modulo p : $\overline{mn}$ est un carré. Puisque n n'en est pas un, m non plus et $n^2 \leq mn$. Donc $n^2 - n < p$ et finalement $\boxed{n < \sqrt{p} + 1}$. □

Exercice 28.10. Soit p premier. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 1 + 2^p \quad [p^2]$$

Chapitre 29

Polynômes

Exercice 29.1 (Lemme de localisation des racines)**.** Considérons le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^d + a_{d-1}\mathrm{X}^{d-1} + ... + a_0$ dont les coefficients sont dans $\mathbb{C}$. Soit z une racine de P. Montrer que

$$|z| \leq \max\left(1, \sum_{k=0}^{d-1} |a_i|\right).$$

Solution. Si $|z| \leq 1$, c'est évident. Supposons $|z| > 1$. Alors

$$|z| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{\mathrm{N}-1-k}}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{\mathrm{N}-1-k}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|.$$

□

Exercice 29.2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

1. $\mathrm{P}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$
2. $\mathrm{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
3. $\mathrm{P}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$
4. $\mathrm{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

Solution.

1. Condition nécessaire. Si $\mathrm{P}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ alors P n'est pas constant.
   Condition suffisante. Si $\deg \mathrm{P} \geq 1$ alors, pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{P} - z$ possède une racine dans $\mathbb{C}$ et donc $z \in \mathrm{P}(\mathbb{C})$.
2. Condition nécessaire. On suppose que $\mathrm{P}(\mathbb{R}) = \mathrm{R}$. Les polynômes d'interpolation de Lagrange fournisse $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Le degré de P est impair, sinon on a $a \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{P}(\mathbb{R}) \neq \varnothing$.
   Condition suffisante. On suppose $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et de degré impair, donc $\mathrm{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit l'autre inclusion.
3. Condition nécessaire. On suppose que $\mathrm{P}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Q}$. Les polynômes d'interpolation de Lagrange fournisse $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Le degré de P est pair. Nous allons montrer qu'il est nécessairement égal à 1. Supposons par l'absurde que $\deg \mathrm{P} \geq 3$.

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$$

Quitte à multiplier par $m \in \mathbb{N}^*$ on peut supposer dans la suite que les a_k sont dans $\mathbb{Z}$, et quitte à factoriser par le *pgcd* des a_k, on suppose dans la suite $a_0 \wedge ... \wedge a_d = 1$.
Soit $p \in \mathbb{P}$ ne divisant pas a_d. Supposons que $\frac{1}{p} \in \mathrm{P}(\mathbb{Q})$. Soit $r = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}} \in \mathbb{Q}$ tel que $\mathrm{P}(r) = \frac{1}{p}$.

$$\frac{1}{p} = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{\mathrm{N}^k}{\mathrm{D}^k} \text{ d'où } \mathrm{D}^d = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{N}^k \mathrm{D}^{d-k} p$$

donc $p|\mathrm{D}^d$ d'où $p|\mathrm{D}$ et finalement p^2 divise

$$\mathrm{D}^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k p \mathrm{N}^k \mathrm{D}^{d-k} = p a_d \mathrm{N}^d$$

ce qui est absurde par hypothèse. Donc $\deg \mathrm{P} = 1$.
Condition suffisante. Supposons $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ et $\deg \mathrm{P} = 1$. Alors il est clair (TVI) que $\mathrm{P}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

4. Condition nécessaire. On suppose que $\mathrm{P}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Z}$. On sait déjà que $\mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ et de degré impair. Supposons par l'absurde que $\deg \mathrm{P} \geq 3$. Alors, lorsque $n \to +\infty$, $|\mathrm{P}(n+1) - \mathrm{P}(n)| \to +\infty$. Dans la suite on suppose le coefficient dominant de P strictement positif. On dispose de $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq \mathrm{N} \Rightarrow \mathrm{P}(n+1) \geq \mathrm{P}(n) + 2$$

Soit $\mathrm{M} = \sup_{n \leq \mathrm{N}} \mathrm{P}(n)$ et $\mathrm{N}' \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq \mathrm{N}' \Rightarrow \mathrm{P}(n) > \mathrm{M}$$

Pour $n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$, $\mathrm{P}(n) + 1 \notin \mathrm{P}(\mathbb{Z})$, c'est absurde. Donc P est de degré 1. $\mathrm{P} = a\mathrm{X} + b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. $\mathrm{P}(0)$ fournit $b \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{P}(1)$ fournit $a \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. Si $|a| \neq 1$ alors $\mathrm{P}(\mathbb{Z}) \subset b + |a|\mathbb{Z} \neq \mathrm{Z}$ donc $a \in \{-1, 1\}$.
Condition suffisante. Si P est de la forme $\pm \mathrm{X} + m$ avec $m \in \mathbb{Z}$, alors il est clair que $\mathrm{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

□

Exercice 29.3. Montrer

$$\{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+\} = \{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 \mid \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$$

Solution. Une inclusion est évidente. Notons

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+\} \qquad \mathrm{B} = \{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 \mid \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$$

Montrons d'abord que B est stable par produit. Cela découle du

Lemme 29.3.1. *Soit $(\mathcal{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathcal{A}^4$,*

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{A}$. Les polynômes d'interpolation de Lagrange assurent que $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On écrit alors

$$\mathrm{P} = c \prod_{i=1}^{t} (\mathrm{X} - a_i)^{\omega_i} \prod_{j=1}^{s} (\mathrm{X}^2 - 2b_i \mathrm{X} + c_i)$$

Une évaluation en $+\infty$ fournit $c > 0$, donc $c = \left(\sqrt{c}\right)^2 \in \mathrm{B}$. Une évaluation au voisinage des racines réelles de P fournit ω_i pair, donc $(\mathrm{X}-a_i)^{\omega_i} \in \mathrm{B}$. Enfin, $\mathrm{X}^2-2b_i\mathrm{X}+c_i = (\mathrm{X}-b_i)^2+(\sqrt{c_i-b_i})^2 \in \mathrm{B}$. Comme B est stable par produit, $\mathrm{P} \in \mathrm{B}$.

$$\boxed{\{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+\} = \{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 \mid \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\}}$$

□

Exercice 29.4 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** Montrer que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Solution. On raisonne par l'absurde. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant et sans racine dans $\mathbb{C}$.

$f : z \mapsto |\mathrm{P}(x)|$ est continue et tend vers $+\infty$ lors $|z| \to \pm\infty$. f présente donc un minimum atteint en un point $\omega \in \mathbb{C}$. (...)

On se ramène au cas $\omega = 0$ et $\mathrm{P}(\omega) = 1$ avec

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}+\omega)}{\mathrm{P}(\omega)}$$

On a alors

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 1 + b_p\mathrm{X}^p + ... + b_q\mathrm{X}^q$$

avec $1 \leq p \leq q$ et $b_p \neq 0$. On pose $b_p = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ ainsi que $u_n = \frac{1}{n}e^{-\frac{i\theta}{p}}e^{\frac{i\pi}{p}}$. On obtient

$$1 \leq |\mathrm{Q}(u_n)|^2 = \left|1 + \rho\frac{e^{i\theta}}{n^p}e^{-i\theta}e^{i\pi} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right|^2 = \left|1 - \frac{\rho}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right|^2 = 1 - 2\frac{\rho}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

et donc

$$|\mathrm{Q}(u_n)|^2 - 1 \sim -\frac{2\rho}{n^p}$$

Ainsi $|\mathrm{Q}(u_n)| < 1$ pour n assez grand. C'est absurde. $\boxed{\mathbb{C} \text{ est algébriquement clôt.}}$ □

Exercice 29.5 (Théorème de Gauss-Lucas)**.** Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré ≥ 2. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 29.6. Montrer que l'ensemble des polynômes réels scindés de degré supérieur ou égal à 1 est stable par dérivation.

Solution.

$$\mathrm{P} = \alpha\prod_{i=1}^{s}(\mathrm{X} - x_i)^{\alpha_i}$$

avec $x_1 < ... < x_s$ et $\alpha_1, ..., \alpha_s$ dans $\mathbb{N}^*$. P' est de degré $n-1$. Les x_i tels que $\alpha_i \geq 2$ sont racines de P'. Le théorème de Rolle fournit les $s-1$ racines manquantes, chacune dans $]x_i, x_{i+1}[$ pour $1 \leq i \leq s-1$. □

Exercice 29.7 (Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$)**.** Pour $n \geq 2$, montrer que $\mathrm{X}^n - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.

Solution. Soit $n \geq 2$.

1. Pour $k = 1, ..., n-1$, $2^{\frac{k}{n}} \notin \mathbb{Q}$.
Supposons par l'absurde que l'on puisse écrire $2^{\frac{k}{n}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} = 1$. Alors

$$\mathrm{A}^n = 2^k \mathrm{B}^n$$

d'où

$$n\nu_2(\mathrm{A}) = k + n\nu_2(\mathrm{B})$$

ce qui est impossible.

2. On raisonne par l'absurde en supposant $\mathrm{X}^n - 2$ composé dans $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Sa décomposition dans $\mathbb{C}$ est

$$\mathrm{X}^n - 2 = \prod_{k=1}^{n} \left(\mathrm{X} - 2^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Un diviseur strict irréductible de $\mathrm{X}^n - 2$ s'écrit

$$\prod_{j=1}^{s} \left(\mathrm{X} - 2^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2ik_j\pi}{n}}\right)$$

où $1 \leq k_1 < ... < k_s \leq n$ et $1 \leq s \leq n-1$. Mais alors $\mathrm{B}(0) \in \mathbb{Q}$ avec

$$\mathrm{B}(0) = \prod_{j=1}^{s} \left(-2^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2ik_j\pi}{n}}\right) = (-1)^s 2^{\frac{s}{n}} e^{\frac{2i\pi}{n}(k_1+...+k_s)}$$

et donc $e^{\frac{2i\pi}{n}(k_1+...+k_s)} \in \mathbb{R} \cap \mathbb{U} = \{-1, 1\}$ ce qui fournit $2^{\frac{s}{n}} \in \mathbb{Q}$. Absurde. Conclusion : $\boxed{\mathrm{X}^n - 2 \text{ est irréductible dans } \mathbb{Q}[\mathrm{X}]}$.

□

Exercice 29.8 (Polynôme cyclotomique)**.** Pour $d \in \mathbb{N}^*$ on appelle d-ième polynôme cyclotomique le polynôme

$$\Phi_d(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \wedge d = 1}}^{d-1} \left(\mathrm{X} - e^{\frac{2ik\pi}{d}}\right)$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$\mathrm{X}^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(\mathrm{X})$$

2. Montrer que $\Phi_d(\mathrm{X}) \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Solution. **1.**

$$\mathrm{X}^n - 1 = \prod_{z \in \mathbb{U}_n} (\mathrm{X} - z) = \prod_{d|n} \prod_{\substack{z \in \mathrm{U}_n \\ \omega(z) = d}} = \prod_{d|n} \prod_{z \in \mathbb{A}_d} (\mathrm{X} - z) = \prod_{d|n} \Phi_d(\mathrm{X})$$

2. On raisonne par récurrence sur n et on utilise la question précédente.

□

Exercice 29.9 (Contenu)**.** Pour $\mathrm{A} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ on appelle contenu le *pgcd* des coefficients de A, noté *cont*(A), et on dit que A est *primitif* si *cont*(A) $= 1$.

1. On suppose A et B primitifs. Montrer que AB est primitif.

2. $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. Montrer *cont*(AB) $=$ *cont*(A)*cont*(B).

Solution. **1.** Supposons par l'absurde que AB ne soit pas primitif. Soit p entier premier divisant $cont(\mathrm{AB})$. Considérons la projection suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\mathrm{X}] \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k \mathrm{X}^k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \overline{c_k}\mathrm{X}^k \end{cases}$$

qui est un morphisme d'anneau (car $c \mapsto \overline{c}$ en est un) et l'on a :

$$\overline{0} = \varphi(\mathrm{AB}) = \varphi(\mathrm{A})\varphi(\mathrm{B})$$

or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, donc est intègre ; $\varphi(\mathrm{A}) = 0$ ou $\varphi(\mathrm{B}) = 0$. A et B jouant des rôles symétriques, supposons $\varphi(\mathrm{A}) = 0$. Mais alors p divise chacun des coefficients de A, donc divise leur contenu. C'est absurde.

2. On peut écrire $\mathrm{A} = cont(\mathrm{A})\tilde{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{B} = cont(\mathrm{B})\tilde{\mathrm{B}}$ avec $\tilde{\mathrm{A}}$ et $\tilde{\mathrm{B}}$ primitif. La question précédente permet de conclure.

□

Exercice 29.10. Soient P et Q dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. Montrer que

$$\mathrm{P}|\mathrm{Q} \text{ dans } \mathbb{Z}[\mathrm{X}] \iff \mathrm{P}|\mathrm{Q} \text{ dans } \mathbb{Q}[\mathrm{X}] \text{ et } cont(\mathrm{P})|cont(\mathrm{Q})$$

Exercice 29.11 (Critère d'Eisenstein)**.** Soit $\mathrm{A} = a_0 + a_1\mathrm{X} + ...a_n\mathrm{X}^n$ un polynôme de $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$. On suppose qu'il existe p un entier premier tel que

— p divise $a_0, ..., a_{n-1}$
— p ne divise pas a_n
— p^2 ne divise pas a_0

Montrer que A est irréductible dans $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.

Solution. On suppose A pas irréductible dans $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathrm{A}' = \frac{\mathrm{A}}{cont\mathrm{A}}$ et on dispose de B' et C' dans $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{A}' = \mathrm{B}'\mathrm{C}'$. On pose $\mathrm{B} = \beta\mathrm{B}'$ et $\mathrm{C} = \delta\mathrm{C}'$ où β et δ sont respectivement les ppmc des dénominateurs des coefficients de B' et C'. Ainsi $\beta\delta\mathrm{A}' \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ et on constate que $cont(\mathrm{B})cont(\mathrm{C}) = cont(\beta\delta\mathrm{A}') = \beta\delta$. Finalement, en notant $\alpha = cont(\mathrm{A})$,

$$\mathrm{A} = \alpha\mathrm{A}' = \alpha\frac{\mathrm{B}}{\beta}\frac{\mathrm{C}}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta\delta}\mathrm{BC} = \frac{\alpha\mathrm{BC}}{cont(\mathrm{B})cont(\mathrm{C})} = \underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{\frac{\mathrm{B}}{cont(\mathrm{B})}}_{\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]}\underbrace{\frac{\mathrm{C}}{cont(\mathrm{C}}}_{\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]}$$

On dispose ainsi de A et B dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{A} = \mathrm{BC}$. On note

$$\mathrm{B} = b_k\mathrm{X}^k + ... + b_0 \text{ et } \mathrm{C} = c_l\mathrm{X}^l + ... + c_0$$

avec $k + l = \deg \mathrm{A} = n$. Mais alors, en notant $\overline{\mathrm{B}}$ et $\overline{\mathrm{C}}$ les projections dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ de A et B, on obtient les résultats contradictoires suivants.

Comme p ne divise pas a_n, $\deg\overline{\mathrm{B}} = k$ et $\deg\overline{\mathrm{C}} = l$. Les hypothèses donnent $\overline{\mathrm{B}} = \overline{b_k}\mathrm{X}^k$ et $\overline{\mathrm{C}} = \overline{c_l}\mathrm{X}^l$ (récurrence). Ainsi $\overline{b_0} = \overline{c_0} = \overline{0}$ et donc $p^2|a_0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ. $\boxed{\text{A est irréductible dans } \mathbb{Q}[\mathrm{X}].}$ □

Ce critère prouvera son utilité dans l'exercice suivant.

Exercice 29.12 (Irréductibilité de $\Phi_p(\mathrm{X})$ dans $\mathbb{Q}$)**.** Soit p un nombre premier. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ et $\Phi_p(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{p-1} + ... + \mathrm{X} + 1$.

1. **a)** On suppose $\Phi_p(\mathrm{X})$ irréductible. Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de ω est un idéal de $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ engendré par Φ_p. *(C'est une généralité relative aux nombres algébriques.)*
   b) Montrer que $\Phi_p(\mathrm{X}+1)$ est irréductible.
   c) En déduire que Φ_p est irréductible.
2. *Corps cyclotomique.* Montrer que $\mathbb{Q}[e^{\frac{2i\pi}{p}}]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{C}$.

Exercice 29.13. Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si les a_i sont distincts, le polynôme

$$\mathrm{P} = 1 + (\mathrm{X} - a_1)^2 ... (\mathrm{X} - a_n)^2$$

est irréductible dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$.

Solution. On raisonne par l'absurde en supposant $\mathrm{P} = \mathrm{AB}$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ et $1 \leq \deg \mathrm{A} \leq \deg \mathrm{P} - 1$ et $1 \leq \mathrm{B} \leq \deg \mathrm{P} - 1$.

On a pour tout $1 \leq i \leq n \quad \mathrm{A}(a_i) = \mathrm{B}(a_i) = 1$ (quitte à changer A et B en $-\mathrm{A}$ et $-\mathrm{B}$) et $\deg \mathrm{A} = \deg \mathrm{B} = n$ (car sinon $\mathrm{A} - 1$ ou $\mathrm{B} - 1$ est nul, ce qui n'est pas le cas). Le coefficient dominant de $\mathrm{A} - 1$ est $\alpha \in \mathbb{Z}$, et celui de $\mathrm{B} - 1$ est β. On a $\alpha \geq 1$ et $\alpha\beta = 1$ (considérations sur le signe de P et le coefficient dominant). Finalement, $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ et

$$1 + \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_i)^2 = (1 + \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_i))^2$$

d'où $0 = 2\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_i)$... $\boxed{\text{P irréductible dans } \mathbb{Z}[\mathrm{X}].}$ □

Exercice 29.14. Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si les a_i sont distincts, le polynôme

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X} - a_1) ... (\mathrm{X} - a_n) - 1$$

est irréductible dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$.

Exercice 29.15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, ..., z_n$ des complexes deux à deux distincts, ainsi que $m_1, ..., m_n$ dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - z_i)^{m_i} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.
Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - z_i) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$$

Solution. Ce qui suit traite de généralités sur les algébriques.

Si $\omega \in \mathbb{C}$ est algébrique (sur $\mathbb{Q}$), l'ensemble des polynômes rationnels annulateurs de ω est un idéal principal de $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, généré par le polynôme minimal de ω, noté $\Pi_{\mathbb{Q},\omega}$. Celui-ci étant irréductible, $\Pi_{\mathbb{Q},\omega} \wedge \Pi'_{\mathbb{Q},\omega} = 1$ et par conséquent $\Pi_{\mathbb{Q},\omega}$ est un psars dans $\mathbb{C}$.

Les $z_1, ..., z_n$ sont algébriques par hypothèse. On définit sur $\mathrm{Z} = \{z_1, ..., z_n\}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$:

$$z_i \mathcal{R} z_j \Leftrightarrow \Pi_{\mathbb{Q},z_i} = \Pi_{\mathbb{Q},z_j}$$

et on a donc, en notant $\Omega_1, ..., \Omega_s$ les classes de $Z/\mathcal{R}$. Si z est un représentant de Ω_k, il est clair que $\Omega_k = \{y \in \mathbb{C} \mid \Pi_{\mathbb{Q},z}(y) = 0\}$. Finalement,

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X} - z_i) = \prod_{k=1}^{s}\prod_{z\in\Omega_k}(\mathrm{X} - z) = \prod_{k=1}^{s}\Pi_{\mathbb{Q},z'_k} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]}$$

□

Exercice 29.16 (Résultant de deux polynômes)**.**

Exercice 29.17 (Formules de Newton (1707))**.** Soit n un entier ≥ 2, $\mathbb{K}$ un corps, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$. Pour $p \in \mathbb{N}$ on note

$$\mathrm{S}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

On note $\sigma_1, ..., \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, ..., x_n$ définies par

$$\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$$

Démontrer les relations suivantes :

1. Pour $p \geq n$,

$$\mathrm{S}_p - \sigma_1\mathrm{S}_{p-1} + ... + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\mathrm{S}_{p-n+1} + (-1)^n\sigma_n\mathrm{S}_{p-n} = 0$$

2. Pour $1 \leq p \leq n-1$,

$$\mathrm{S}_p - \sigma_1\mathrm{S}_{p-1} + ... + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}\mathrm{S}_1 + (-1)^p\sigma_p p = 0$$

Solution. **1.** On considère

$$\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X} - x_i) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$$

Il s'écrit aussi

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)\hat{\imath}\sigma_i\mathrm{X}^{n-i}$$

et puisque $\mathrm{P}(x_i) = 0$, pour $1 \leq i \leq n$,

$$x_i^n - \sigma_1 x_i n - 1 + ... + (-1)^p\sigma_n = 0$$

ce qui donne en multipliant par $x_i p - n$

$$x_i^p - \sigma_1 x_i p - 1 + ... + (-1)^p\sigma_n x_i p - n = 0$$

et finalement en additionnant les relations pour $1 \leq i \leq n$ on obtient

$$\boxed{\mathrm{S}_p - \sigma_1\mathrm{S}_{p-1} + ... + (-1)^n\sigma_n\mathrm{S}_{p-n} = 0}$$

2. C'est plus délicat mais on s'en sort quand même ! La difficulté est surtout dans l'écriture...

$$\mathrm{S}_p = \sum_{k=1}^{n} x_k^p = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{p-1}\right) - \sum_{\substack{1\le i_1,i_2\le n\\ i_1\neq i_2}} x_{i_1}x_{i_2}^{p-1}$$

De même on a

$$\sigma_2\mathrm{S}_{p-2} = \left(\sum_{1\le i_1<i_2\le n} x_{i_1}x_{i_2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{p-2}\right) = \sum_{\substack{1\le i_1,i_2\le n\\ i_1\neq i_2}} x_{i_1}x_{i_2}^{p-1} + \sum_{\substack{1\le i_1<i_2\le n\\ i_3\neq i_1,i_2}} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}^{p-2}$$

Normalement on commence à comprendre comment ça marche et on pose donc assez naturellement pour $0\le k\le p-1$

$$\mathrm{A}_k = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n\\ i_{k+1}\neq i_1,\ldots,i_k}} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}x_{i_{k+1}}^{p-k}$$

On a $\mathrm{A}_0=\mathrm{S}_p$ et $\mathrm{A}_{p-1}=p\sigma_p$ avec la relation pour $1\le k\le p-1$:

$$\sigma_k\mathrm{S}_{p-k} = \mathrm{A}_{k-1}+\mathrm{A}_k$$

En réinjectant cette relation rang après rang (avec l'alternance de signe) on obtient bien

$$\boxed{\mathrm{S}_p-\sigma_1\mathrm{S}_{p-1}+\ldots+(-1)^{p-1}\sigma_{p-1}\mathrm{S}_1+(-1)^p\sigma_p p=0}$$

□

Exercice 29.18 (Un théorème de Kronecker)**.** Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ unitaire dont toutes les racines complexes sont de modules ≤ 1.
Montrer que toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

Solution. On note n le degré de P et $z_1,\ldots,z_n$ les racines de P comptées avec leur multiplicité. $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ les fonctions symétriques des racines.

$$\mathrm{P}=\mathrm{X}^n-\sigma_1\mathrm{X}^{n-1}+\sigma_2\mathrm{X}^{n-2}+\ldots+(-1)^n\sigma_n$$

On en déduit que $\sigma_k\in\mathbb{Z}$ et plus précisément

$$|\sigma_k|\le\left|\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} z_{i_1}z_{i_2}\ldots z_{i_n}\right|\le\binom{n}{k}$$

ce qui fournit le résultat suivant : l'ensemble Ω_n des polynômes unitaires de degré n dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ dont les racines sont toutes de module ≤ 1 est fini.

On pose alors pour $k\in\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{P}_k=(\mathrm{X}-z_1^k)\ldots(\mathrm{X}-z_n^k)$$

polynôme dont le coefficient devant X^{n-r} est $(-1)^r\sigma_r(z_1,\ldots,z_n^k)$. C'est un polynôme symétrique en $z_1,\ldots,z_n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, donc un polynôme à coefficients entiers en les fonctions symétriques élémentaires des z_i qui sont elles-mêmes dans $\mathbb{Z}$. Finalement, $\mathrm{P}_k\in\Omega_n$. Comme cet ensemble est fini, il en est de même pour l'ensemble des racines de ses éléments, et donc $k\mapsto z_i^k$ n'est pas injective. Autrement dit $\boxed{z_i \text{ est une racine de l'unité}}$. □

Exercice 29.19 (Automorphismes de K(X)).

1. Déterminer les automorphismes de la K-algèbre K[X].
2. Déterminer les automorphismes de la K-algèbre K(X) des fractions rationnelles à une indéterminée.

Exercice 29.20. **1.** Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que $Q + aQ'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $R = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^{(k)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution. Remarque : si Q est scindé sur $\mathbb{R}$, Q' l'est également, d'après le théorème de Rolle.

1. On exclut le cas trivial où $a = 0$. Supposons $a \neq 0$ et considérons la fonction f de la classe $\mathcal{C}^\infty$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f(x) = ae^{\frac{x}{a}} P(x)$$
On a pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = (P(x) + aP'(x))e^{\frac{x}{a}}$$
et d'après le théorème de Rolle, f' s'annule un nombre de fois égal au cardinal des racines simples de Q moins un. Ainsi $Q + aQ'$ possède $\deg Q$ racines réelles et est donc scindé sur $\mathbb{R}$.
Autre approche : si $Q = (X - a_1)^{\omega_1} ... (X - a_s)^{\omega_s}$ étudier
$$x \mapsto \left(\frac{Q + aQ'}{Q}\right)(x) = 1 + a \sum_{i=1}^{s} \frac{\omega_i}{x - a_i}$$
qui tend vers $+\infty$ en a_i^+ et vers $-\infty$ en a_i^-, donc s'annule sur $]a_i, a_{i+1}[$, $1 \leq i \leq s - 1$ (TVI) ce qui fournit les racines manquantes.
2. Si on note D l'opérateur de dérivation,
$$R = P(D)(Q) = \alpha(Q' - a_1 Q)...(Q' - a_n Q)$$
avec des notations évidentes et il suffit d'appliquer la question précédente.

$\square$

Exercice 29.21 (Polynômes symétriques). $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ est dit symétrique en les X_i si
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad P(X_1, ..., X_n) = P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)})$$
Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ est symétrique, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ tel que
$$P(X_1, ..., X_n) = Q(\sigma_1(X_1, ..., X_n), ..., \sigma_n(X_1, ..., X_n))$$
où pour $1 \leq k \leq n$, σ_k est le polynôme symétrique élémentaire
$$\sigma_k(X_1, ..., X_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}$$

Chapitre 30

Espaces vectoriels et applications linéaire

Exercice 30.1 (Théorème de la base incomplète)**.** Soit E un espace vectoriel. On suppose qu'existe une famille libre $\mathcal{L}$ d'éléments de E, de cardinal fini, et une famille génératrice $\mathcal{G}$ de E de cardinal fini.
Montrer qu'il existe une base de E obtenue en complétant $\mathcal{L}$ par des vecteurs de $\mathcal{G}$.

Solution. On suppose $\mathrm{E} \neq \{0\}$ [1]. On note $\mathcal{L} = \{x_1, ..., x_q\}$ et $\mathrm{G} = \{x_{q+1}, ..., x_r\}$. Considérons alors

$$\mathrm{A} = \{l \in [\![0, r-q]\!] \mid \exists x_{i_1}, ..., x_{i_q} \in \mathrm{G},\, x_1, ..., x_q, x_{i_1}, ..., x_{i_l} \text{ libres}\}$$

qui est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, donc A contient un plus grand élément, noté n.

On dispose ainsi de $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$ n vecteurs de G tels que $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_q, x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ libres.

Soit $j \in \{q+1, ...r\}$. Montrons que $x_j \in \mathrm{Vect(B)}$. Si $j \in \{i_1, ..., i_n\}$, c'est vrai. Sinon, $j \notin \{i_1, ..., i_n, 1, ...q\}$ et alors par maximalité de n, $(x_1, ..., x_q, x_{i_1}, ..., x_{i_n}, x_j)$ est liée, donc $x_j \in \mathrm{Vect(B)}$.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est libre et génératrice. C'est une base de E. $\square$

Exercice 30.2 (Théorème du rang)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Montrer

$$\dim \mathrm{E} = \mathrm{rg}\, u + \dim \ker u$$

Solution. Soit H un supplémentaire de $\ker u$ dans E, et

$$\hat{u} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{H} & \to & \mathrm{Im}\, u \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right.$$

$\hat{u}$ est linéaire et clairement injective (puisque $\mathrm{H} \cap \ker u = \{0\}$). Soit $y \in \mathrm{Im}\, u$ et $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(x)$. Soit $(h, l) \in \mathrm{H} \times \ker u$ tels que $x = h + l$.

$$y = u(x) = u(h+l) = u(h) + u(l) = u(h) = \hat{u}(h)$$

1. On dispose donc d'une famille libre de cardinal 1. Si $\mathrm{E} = \{0\}$, alors $\mathcal{L} = \varnothing$ et la démonstration est la même avec $\mathrm{A} = \{l \in [\![0, r-q]\!] \mid \exists x_{i_1}, ..., x_{i_q} \in \mathrm{G},\, (x_1, ..., x_q, x_{i_1}, ..., x_{i_l}) \text{ libres}\}$

donc $y \in \operatorname{Im} \hat{u}$ et $\hat{u}$ est surjective. Ainsi H est isomorphe à $\operatorname{Im} u$. D'où $\operatorname{rg} u = \dim \mathrm{H}$ et [2]

$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{H} + \dim \ker u = \operatorname{rg} u + \dim \ker u$$

□

Exercice 30.3. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists\, \phi \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G}),\ g = \phi \circ f \ \Leftrightarrow \ker f \subset \ker g \tag{30.1}$$

Solution. Le sens direct est évident. On s'intéresse à la réciproque en supposant que $\ker f \subset \ker g$, pour construire ϕ. Soit $(v_1, ..., v_s)$ base de $\operatorname{Im} f$ complétée en $(v_1, ..., v_s, \eta_1, ..., \eta_r)$ base de F. Pour $i = 1, ..., s$, soit $u_i \in \mathrm{E}$ tel que $f(u_i) = v_i$ (rappel : on définit l'application linéaire par son action sur une base).

Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $\phi(v_i) = g(u_i)$ et $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\phi(\eta_i) = 0$. Montrons que $\phi \circ f = g$. Soit $(\epsilon_1, ..., \epsilon_t, u_1, ..., u_s)$ une base de E. On vérifie aisément que g et $\phi \circ f$ coïncident sur cette base. □

Exercice 30.4. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\exists\, \phi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}),\ f = g \circ \phi \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g \tag{30.2}$$

Solution. On s'intéresse au sens réciproque. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E et, pour $i = 1, ..., n$, soit ε_i tel que $g(\varepsilon_i) = f(e_i)$.

Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que $\phi(e_i) = \varepsilon_i$. On vérifie que $g \circ \phi$ et f coïncident sur $(e_1, ..., e_n)$. □

Exercice 30.5 (Lemme des rangs)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme sur E.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note r_k le rang de f^k. Montrer que la suite ainsi définie est décroissante, concave (*ie* que $\forall k \in \mathbb{N}^*\ r_{k+2} - r_{k+1} \leq r_{k+1} - r_k$), et que $(r_k = r_{k+1} \Rightarrow \forall \nu \geq k\ r_\nu = r_k)$.

Exercice 30.6 (Union de s.e.v stricts)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ est également un sous-espace vectoriel, alors $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ ou $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$.

Solution. On suppose par l'absurde que $\mathrm{F} \not\subseteq \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \not\subseteq \mathrm{F}$. On dispose $x \in \mathrm{F} \setminus \mathrm{G}$ et $y \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{F}$. x et y sont dans $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ et donc $x + y$ aussi. Supposons par exemple que $x + y \in \mathrm{F}$. Alors $y = (x + y) - x \in \mathrm{F}$. Absurde. □

Exercice 30.7 (Espace vectoriel union de s.e.v stricts)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $k \geq 2$ et $(\mathrm{V}_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de s.e.v. stricts de E. Si $\mathrm{E} = \mathrm{V}_1 \cup ... \cup \mathrm{V}_k$, montrer que $\mathbb{K}$ est fini et que $|\mathbb{K}| \leq k - 1$. [a] Cas d'égalité ?

a. Ainsi un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas union finie de sous-espaces vectoriels stricts.

2. Cette démonstration prend bien son temps, mais est pleine de sens. C'est une ode au théorème du rang.

Solution. Quitte à retirer V_1 on suppose $V_1 \not\subseteq V_2 \cup ... \cup V_k$. On dispose de $x \in V_1$ avec $x \notin V_2 \cup ... \cup V_k$ et $y \in V_2 \cup ... \cup V_k$ avec $y \notin V_1$. On va injecter $\mathbb{K}$ dans $\{2, ..., n\}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $y \notin V_1$, alors $\lambda x + y \in V_2 \cup ... \cup V_k$. L'application $\lambda \mapsto i_\lambda$ tel que $\lambda x + y \in V_{i\lambda}$ est injective, puisque si μ et λ sont tels que $i_\lambda = i_\mu$ alors $(\lambda - \mu)x \in V_2 \cup ... \cup V_k$ ce qui impose $\lambda = \mu$. Donc $\mathbb{K}$ est fini et $|\mathbb{K}| \leq k - 1$. □

Exercice 30.8. Soit $\mathbb{K}$ un corps infini et E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soient F_1, ... , F_p des sous-espaces stricts de E, de même dimension. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à tous les F_i.

Solution. On note r la dimension des F_i. L'ensemble des sous-espaces G de E tels que $F_i \cap G = \{0\}$ pour tout i dans $\{1, ..., p\}$ est non vide : il contient $\{0\}$. Considérons G dans cet ensemble, de dimension maximale. Si $r + \dim G < \dim E$, d'après l'exercice 30.7, on dispose de $x \in E$ qui ne soit dans aucun des $F_i \oplus G$. Mais alors $G \oplus \mathbb{K}x$ est un supplémentaire commun à tous les F_i et il est de dimension strictement supérieure à celle de G. Donc finalement, $r + \dim G = \dim E$ et le résultat est prouvé. □

Exercice 30.9 (Liberté de quelques familles remarquables de fonctions)**.** Montrer que dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les familles suivantes sont des familles libres :

1. $x \mapsto e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

2. $x \mapsto \cos(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

3. $x \mapsto |x - \lambda|$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Solution. **1.** Raisonner par l'absurde, réordonner judicieusement la combinaison linéaire $0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_{\lambda_i}$ avec $\lambda_1 > ... > \lambda_n$ tout en retirant les μ_i nuls. Notamment, $\mu_1 \neq 0$. Mais alors

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda_1 x} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e^{\lambda_i x} \right) = \mu_1$$

D'où $\mu_1 = 0$, absurde.

2. Raisonner par récurrence sur le nombre de termes non nuls dans une combinaison linéaire donnée. Pour l'hérédité, dériver deux fois la somme de fonctions, ajouter ce que l'on obtient à $\lambda n^2 \sum_{i=1}^{n} f_{\lambda_i}$ et appliquer l'hypothèse de récurrence. Cette méthode est valable pour l'exemple précédent, notamment lorsque l'ensemble de définition considéré n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier.

3. Étudier la dérivabilité d'une combinaison linéaire.

□

Exercice 30.10. Pour $a \in \mathbb{C}$, on note $g_n = (a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ici $0^0 = 1$). Montrer que $(g_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Solution. Voir chapitre de réduction. □

Exercice 30.11 (Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension paire)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n. Établir l'équivalence des assertions suivantes :

(i) $\exists f \in \mathcal{L}(E) \quad f \circ f = -\mathrm{id}_E$

(ii) n est pair

(iii) il existe sur E une structure de $\mathbb{C}$-ev induisant la structure initiale de $\mathbb{R}$-ev

Solution. (i)⇒(ii) : Si $(e_1, ..., e_d)$ est une $\mathbb{C}$-base de E, il est facile de montrer que $(e_1, ..., e_d, ie_1, ..., ie_d)$ $\mathbb{R}$-génère E et qu'elle est $\mathbb{R}$ libre.

(i)⇒(iii) : Considérer $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, $x \mapsto ix$.

(iii)⇒(i) : Considérer

$$* : \begin{cases} \mathbb{C} \times \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ (z, u) & \mapsto & \Re(z)u + \Im(z)\varphi(u) \end{cases}$$

La propriété $\varphi^2 = -\mathrm{id}$ intervient lorsqu'il s'agit de vérifier $z_1 * (z_2 * x) = z_1 z_2 * x$.

(ii)⇒(iii) : Soit $(e_1, ..., e_{2d})$ une $\mathbb{R}$-base de E. Considérer $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ définie par

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} e_{d+i} & \text{si } 1 \leq i \leq d \\ -e_{i-d} & \text{si } d+1 \leq i \leq 2d \end{cases}$$

□

Exercice 30.12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\dim \ker g \circ f \leq \dim \ker f + \dim \ker g$$

Solution.

$$\dim \mathrm{E} = \dim \ker f + \mathrm{rg}\, f$$

$$\dim \mathrm{E} = \dim \ker g \circ f + \mathrm{rg}\, g \circ f$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\, f &= \dim \ker g_{|\,\mathrm{Im}\, f} + \mathrm{rg}\, g_{|\,\mathrm{Im}\, f} \\ &= \dim \ker g_{|\,\mathrm{Im}\, f} + \mathrm{rg}\, g \circ f \end{aligned}$$

d'où

$$\dim \ker g \circ f = \dim \ker f + \dim \ker g_{|\,\mathrm{Im}\, f} \leq \dim \ker f + \dim \ker g$$

□

Exercice 30.13. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Établir l'équivalence des conditions suivantes :

(i) $\mathrm{Im}\, f = \ker f$

(ii) $f \circ f = 0$ et $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \quad h \circ f + f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$

Exercice 30.14. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, U et V deux sev de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que $\mathrm{U} + \mathrm{V} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\forall (u, v) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \quad u \circ v = -v \circ u$.

1. Soit $(p, q) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V}$ tel que $p + q = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Montrer que p et q sont des projecteurs.

2. On pose $r = \mathrm{rg}\, p$. Montrer que $\dim \mathrm{V} \leq (n - r)^2$.

3. En déduire que $\{\mathrm{U}, \mathrm{V}\} = \{\mathcal{L}(\mathrm{E}), \{0\}\}$

Solution. **1.** On a :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{id}_{\mathrm{E}} - p) &= -(\mathrm{id}_{\mathrm{E}} - p)p \\ p^2 - p &= p - p^2 \\ 2(p - p^2) &= 0 \\ p &= p^2 \end{aligned}$$

et de même pour q.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que la matrice de p dans $\mathcal{B}$ soit

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v \in \mathrm{V}$. La matrice de v dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{B} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

$p \circ v = -v \circ p$ donne $\mathrm{A} = -\mathrm{A}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$. La matrice de v dans $\mathcal{B}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\dim \mathrm{V} \leq (n-r)^2$.

3.

$$n^2 = \dim(\mathrm{U}+\mathrm{V}) \leq \dim \mathrm{U} + \dim \mathrm{V} \leq r^2 + (n-r)^2$$

d'où

$$0 \leq r(r-n)$$

et donc $r = n$ ou $r = 0$.

□

Exercice 30.15. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de dimension finie. Montrer que E possède une base dont tous les éléments sont de même degré ainsi qu'une base dont tous les éléments sont de degrés deux à deux distincts.

Exercice 30.16 (Racine carrée de la dérivation)**.** Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathrm{D} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ l'opérateur de dérivation.
Existe-t-il T dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{T} \circ \mathrm{T} = \mathrm{D}$?

Solution. Soit un tel T. On considère $\ker \mathrm{D}^2$, plan vectoriel isomorphe à $\mathbb{C}_1[\mathrm{X}]$. Il est stable par D mais aussi par T puisque T et D commutent :

$$\mathrm{T} \circ \mathrm{D} = \mathrm{T}^3 = \mathrm{D} \circ \mathrm{T}$$

On note d et t les restriction de D et T à $\ker \mathrm{D}^2$. On a donc toujours $t^2 = d$ et $d^2 = 0$. Par conséquent, $t^4 = 0$ et t est nilpotent, par conséquent $t^2 = 0$, c'est absurde.
Un nilpotent n'est jamais un carré. □

Exercice 30.17. Déterminer les sous-algèbres de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie.

Solution. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non constante. La famille $(f^n)^{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Soient $\lambda_0, ..., \lambda_n$ des réels tels que

$$\lambda_0 + \lambda_1 f + ... + \lambda_n f^n = 0$$

Ainsi l'image de f annule le polynôme $\mathrm{P} = \lambda_0 + ... + \lambda_n \mathrm{X}^n$. Comme on a supposé f non constante, c'est un intervalle et finalement P est nul. Donc $(f^n)^{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
La seule sous-algèbre de dimension finie de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension 1 : il s'agit de la sous-algèbre des $\boxed{\text{fonctions constantes.}}$ □

Chapitre 31

Matrices et déterminants

Exercice 31.1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$. Montrer que $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$.

Solution. Adopter un point de vue géométrique. C'est le théorème du rang qui fournit l'argument clef. □

Exercice 31.2. Un paysan possède $(2n+1)$ vaches. Lorsqu'il isole n'importe laquelle d'entre elles, il peut séparer l'ensemble des $2n$ autres en deux groupes de n vaches dont la somme des masses est égales. Montrer que toutes les vaches ont la même masse.

Exercice 31.3. Soit A un anneau commutatif. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathrm{A})$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathrm{Z} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{A}),\ \forall \mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{A}),\ \mathrm{MN} = \mathrm{NM}\}.$$

Solution. Nous allons montrer que $\mathrm{Z} = \mathrm{AI}_n$. On utilise la famille $(\mathrm{E}^{uv})_{(u,v)\in[\![1,n]\!]^2}$ et on tire de la propriété de commutativité des conditions sur les matrices appartenant au centre. □

Exercice 31.4. Montrer que le groupe multiplicatif des matrices de permutations est isomorphe à $(\mathfrak{S}_n, \circ)$, puis expliciter son centre.

Exercice 31.5 (ENS)**.** Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

Solution. (...) (cf cours) □

Exercice 31.6. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note r son rang. Montrer qu'il existe Q et P respectivement dans $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{G}\ell_p(\mathbb{K})$ telles que

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q}^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}.$$

Solution. Démonstration géométrique □

Exercice 31.7. Montrer que le rang d'une matrice est stable par extension du corps de base.

Solution. Conséquence de l'exercice précédent et du fait que si $\mathcal{L}$ est un sur-corps de $\mathbb{K}$ alors $\mathrm{G}\mathcal{L}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{G}\mathcal{L}_n(\mathbb{L})$. □

Exercice 31.8. Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $x_1 \wedge ... \wedge x_n = 1$.

Montrer qu'il existe une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Solution. Étudions

$$\mathrm{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n \ \middle|\ x_1 \wedge ... \wedge x_n = 1 \right\}$$

Pour $\mathrm{X} \in \mathbb{Z}^n$, on note $gcd(\mathrm{X})$ le pgcd de ses coefficients. Pour $\mathrm{G} \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{U}$, $gcd(\mathrm{X})|gcd(\mathrm{GX})$ et $gcd(\mathrm{GX})|gcd(\mathrm{G}^{-1}\mathrm{GX})$ donc $gcd(\mathrm{GX}) = gcd(\mathrm{X})$ et $\mathrm{GU} = \mathrm{U}$.

Notons U_0 la partie de U constituée des éléments vérifiant l'énoncé, et U_N sont complémentaire dans U. On montre $\mathrm{GU}_0 = \mathrm{U}_0$: en effet $\mathrm{GX} = \mathrm{C}_1(\mathrm{GM})$ où M matrice carrée inversible dont la première colonne est $\mathrm{X} \in \mathrm{U}_0$. Par conséquent, on a donc également $\mathrm{GU}_\mathrm{N} = \mathrm{U}_\mathrm{N}$ (bijection induite par G).

Pour $\mathrm{X} \in \mathbb{Z}^n$, on note w le poids de X : $w(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Supposons $\mathrm{U}_n \neq \varnothing$ et prenons $\mathrm{X} \in \mathrm{U}_n$ de poids minimal. Quitte à multiplier par une matrice diagonale de 1 et -1, on suppose que les x_i sont positifs ou nuls ; quitte à multiplier par une matrice de permutation, on les range par ordre décroissant. On a obligatoirement $x_2 \neq 0$ et finalement $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_n$ de poids strictement inférieur à celui de X, c'est absurde. Donc $\mathrm{U}_n = \varnothing$. $\square$

On rappelle :

$$\mathcal{U} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{M}_{ii} \neq 0 \text{ et } i > j \Rightarrow \mathrm{M}_{ij} = 0\}$$
$$\mathcal{L} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{M}_{ii} = 1 \text{ et } i < j \Rightarrow \mathrm{M}_{ij} = 0\}$$

$\mathcal{U}$ et $\mathcal{L}$ sont des sous-groupes de $\mathrm{G}\mathcal{L}_n(\mathbb{K})$, d'intersection réduite à I_n.

Exercice 31.9. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer qu'une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition LU si et seulement si ses mineurs principaux sont tous non nuls.

Solution. Condition nécessaire. Supposons que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admette une décomposition LU. Alors pour $1 \leq i \leq n$,

$$\mu_i(\mathrm{M}) = \det \mathrm{M}_i = \det(\mathrm{LU})_i = \det \mathrm{L}_i\mathrm{U}_i = \det \mathrm{L}_i \det \mathrm{U}_i = 1 \times \mathrm{U}_{11} \times ... \times \mathrm{U}_{nn} \neq 0$$

Condition suffisante. On démontre par récurrence sur n que la condition est suffisante. C'est vrai pour $n = 1$ Soit $n \geq 2$ tel que la propriété soit vraie au rang $n-1$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les mineurs principaux sont non nuls. M_{n-1} possède donc une décomposition LU. On dispose de L' et U' dans $\mathcal{L}_{n-1}$ et $\mathcal{U}_{n-1}$ tels que $\mathrm{M}_{n-1} = \mathrm{L}'\mathrm{U}'$. Pour $(x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbb{K}^{n-1}$ on pose

$$\mathrm{L}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{L}' & 0 \\ x_1 \ ...\ x_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

et pour $(y,z) \in \mathbb{K}^{n-1} \times \mathbb{K}$ on pose

$$\mathrm{U}(y,z) = \begin{pmatrix} & y_1 \\ \mathrm{U}' & \vdots \\ & y_{n-1} \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

Résolvons l'équation $\mathrm{L}(x)\mathrm{U}(y,z) = \mathrm{M}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{K}^{2n-1}$. Pour $1 \leq i \leq n-1$,

$$(\mathrm{L}(x)\mathrm{U}(y,z))_i = \mathrm{L}(x)_i \mathrm{U}(y,z)_i = \mathrm{L}'_i \mathrm{U}'_i = \mathrm{M}_i$$

donc les équations qui nous intéressent vraiment sont

$$\begin{array}{ll} j = 1, ..., n-1 & \mathrm{M}_{nj} = x_1 \mathrm{U}_{1j} + x_2 \mathrm{U}_{2j} + ... + x_j \mathrm{U}_{jj} \\ i = 1, ..., n-1 & \mathrm{M}_{in} = \mathrm{L}_{11} y_1 + ... + \mathrm{L}_{ii} y_i \\ & \mathrm{M}_{nn} = x_1 y_1 + ... + x_{n-1} y_{n-1} + z \end{array}$$

□

Les deux premiers groupes de relations sont des systèmes triangulaires à coefficients diagonaux tous non nuls, donc possèdent chacun une unique solution. z est déterminé par la dernier relation. De plus, $\underline{z \neq 0}$ car $0 \neq \det \mathrm{M} = \mathrm{U}_{11} \times ...\mathrm{U}_{n-1\,n-1} \times z$.

Exercice 31.10. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}^*$ avec $n_1 + ... + n_p = \mathrm{N}$ et A la matrice par blocs

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \cdots & \mathrm{A}_{1p} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_{pp} \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{A}_1 1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$, ... , $\mathrm{A}_p p \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ et les autres matrices avec les bonnes dimensions. Montrer que

$$\det \mathrm{A} = \prod_{i=1}^{p} \det \mathrm{A}_{ii}$$

__Solution__. C'est vrai pour $p = 1$. On le montre pour $p = 2$ et il suffira d'étendre le résultat par récurrence ensuite.

Soit donc

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrons que $\det \mathrm{M} = \det \mathrm{A} \times \det \mathrm{C}$.

Fixons B et C et faisons varier A. Si $(\mathrm{X}_1, ...\mathrm{X}_n) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})^n$, on pose ainsi

$$\Phi(\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 & \cdots & \mathrm{X}_n & \mathrm{B} \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

Φ est n-linéaire alternée, elle est donc proportionnelle au determinant de $\mathrm{X}_1, ...\mathrm{X}_n$. La constante de proportionnalité est

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

que l'on calcul en posant pour $(\mathrm{Y}_1, ..., \mathrm{Y}_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})^p$

$$\theta(\mathrm{Y}_1, ..., \mathrm{Y}_p) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{Y}_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \mathrm{Y}_p \end{pmatrix}$$

θ est p-linéaire alternée, proportionnelle au déterminant de $\mathrm{Y}_1, ..., \mathrm{Y}_p$ et la constante de proportionnalité est

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}$$

qui est 1 (déterminant d'une matrice triangulaire supérieure avec que des 1 sur la diagonale...) ce qui finalement nous fournit le résultat :

$$\boxed{\det \mathrm{M} = \det \mathrm{A} \det \mathrm{C}}$$

□

Exercice 31.11. On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det \mathrm{AD} - \mathrm{BC}$$

Solution. Si A est inversible,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{A}^{-1}\mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \mathrm{B} & -\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{CD} \end{pmatrix}$$

ce qui fournit le résultat.

On prolonge ensuite le résultat par densité en remplaçant A par $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ avec λ assez petit, pour lequel $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{A}$ est inversible, du fait du nombre fini des racines de χ_{A}... □

Exercice 31.12 (Déterminant de Cauchy)**.** Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$ avec $\alpha_i + \beta_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
Calculer le déterminant

$$\left| \frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right|_{1 \leq i,j \leq n}$$

Solution. On note D_n ce déterminant.

Pour $j = 1, ..., n-1$ on effectue l'opération sur les colonnes $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j - \mathrm{C}_n$ ce qui donne sur les coefficients pour $1 \leq j \leq n-1$:

$$\frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \leftarrow \frac{1}{\alpha_i + \beta_j} - \frac{1}{\alpha_i + \beta_n} = \frac{\beta_n - \beta_j}{(\alpha_i + \beta_j)(\alpha_i + \beta_n)} \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

d'où en factorisant,

$$\mathrm{D}_n = \prod_{1\leq j\leq n-1}(\beta_n-\beta_j)\begin{vmatrix} & & \frac{1}{\alpha_1+\beta_n} \\ & \frac{1}{(\alpha_i+\beta_j)(\alpha_i+\beta_n)} & \vdots \\ & & \frac{1}{\alpha_n+\beta_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{1\leq j\leq n-1}(\beta_n-\beta_j)}{\displaystyle\prod_{1\leq i\leq n}(\alpha_i+\beta_n)}\begin{vmatrix} & & 1 \\ & \frac{1}{(\alpha_i+\beta_j)(\alpha_i+\beta_n)} & \vdots \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

De nouveaux, pour $i = 1, ..., n-1$ on effectue l'opération sur les lignes $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_n$ ce qui donne sur les coefficients pour $1 \leq i \leq n-1$:

$$\frac{1}{\alpha_i+\beta_j} \leftarrow \frac{1}{\alpha_i+\beta_j} - \frac{1}{\alpha_n+\beta_j} = \frac{\alpha_n-\alpha_i}{(\alpha_i+\beta_j)(\alpha_n+\beta_j)} \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

et donc

$$\mathrm{D}_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq j\leq n-1}(\beta_n-\beta_j)}{\displaystyle\prod_{1\leq i\leq n}(\alpha_i+\beta_n)}\begin{vmatrix} & & 0 \\ & \frac{\alpha_n-\alpha_i}{(\alpha_i+\beta_j)(\alpha_n+\beta_j)} & \vdots \\ & & 0 \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{1\leq j\leq n-1}(\beta_n-\beta_j)}{\displaystyle\prod_{1\leq i\leq n}(\alpha_i+\beta_n)}\frac{\displaystyle\prod_{1\leq i\leq n-1}(\alpha_n-\alpha_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq j\leq n}(\alpha_n+\beta_j)}\underbrace{\begin{vmatrix} & 0 \\ \frac{1}{\alpha_i+\beta_j} & \vdots \\ & 0 \\ * \cdots * & 1 \end{vmatrix}}_{\mathrm{D}_{n-1}}$$

d'où l'on déduit par récurrence

$$\boxed{\mathrm{D}_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j-\alpha_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(\beta_j-\beta_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n}(\alpha_i+\beta_j)}}$$

$\square$

Chapitre 32

Dualité

Exercice 32.1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à deux.
Soient $\varphi_1, ..., \varphi_p$et f des formes linéaires sur E. Montrer

$$f \in \operatorname{Vec}(\varphi_1, ..., \varphi_p) \Longleftrightarrow \bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k \subset \ker f.$$

Solution. Condition nécessaire. C'est évident.

Condition suffisante. On prouve le résultat par récurrence sur p. Soit $\mathcal{H}_p$: «Si E est un $\mathbb{K}$-ev, $\varphi_1, ..., \varphi_p \in \mathrm{E}^*$ et $f \in \mathrm{E}^*$ avec $\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k \subset \ker f$ alors $f \in \operatorname{Vec}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$.»

$\mathcal{H}_0$ est vraie : $\ker f = \mathrm{E}$ et $f = 0$ donc $f \in \operatorname{Ver}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$.

$\mathcal{H}_1$ est vraie : $\ker \varphi_1 \subset \ker f$. Si $\varphi = 0$ c'est évident. Si $\varphi_1 \neq 0$, alors $\ker \varphi_1$ est un hyperplan et $\ker f \in \{\ker \varphi_1, \mathrm{E}\}$. Dans les deux cas, $f \in \mathbb{K}\varphi_1$ et $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Soit $p \geq 2$ tel que $\mathcal{H}_{p-1}$ soit vraie. Soient $\varphi_1, ..., \varphi_p$ et $f \in \mathrm{E}^*$ comme dans l'énoncé. Si $\varphi_p = 0$ on se ramène au rang inférieur. Sinon, posons $\mathrm{F} = \ker \varphi_p$ et $\tilde{f}, \tilde{\varphi}_1, ..., \tilde{\varphi}_{p-1}$ les restrictions de $f, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$ à F. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à ces fonctions et finalement on dispose de $\mu_1, ..., \mu_{p-1}$ tels que $0 = \tilde{f} - \mu_1\tilde{\varphi}_1 - ... - \mu_p\tilde{\varphi}_p$ et finalement $\ker \varphi_p \subset \ker (f - \mu_1\varphi_1 - ... - \mu_p)$. En appliquant $\mathcal{H}_1$, on en déduit $\mathcal{H}_p$ et la récurrence se propage.

□

Exercice 32.2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque. Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ et $\varphi_1, ..., \varphi_p \in \mathrm{E}^*$. Montrer

$$\operatorname{rg}_{\mathrm{E}^*}(\varphi_1, ..., \varphi_p) = \operatorname{codim}_{\mathrm{E}} \left(\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k \right)$$

c'est-à-dire que supplémentaire de $\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k$ vérifie S^* isomorphe à $\operatorname{Vec}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$.

Solution. $\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k$ est une intersection finie d'hyperplans donc est de codimension finie égale à

s. Soit S un supplémentaire de dimension égale à s.

$$\mathrm{E} = \mathrm{S} \oplus \bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k$$

Considérons :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Vec}(\varphi_1, ..., \varphi_p) & \to & \mathrm{S}^* \\ f & \mapsto & f_{|\mathrm{S}} \end{array} \right.$$

Φ est clairement linéaire.

Si $f \in \ker \Phi$, f est nulle sur S mais aussi sur $\bigcap\limits_{k=1}^{p} \ker \varphi_k$ donc est nulle partout. Ainsi Φ est injective.

Si $g \in \mathrm{S}^*$, alors en considérant $f = g \circ p_{\mathrm{S,G}}$, d'après l'exercice précédent $f \in \mathrm{Vec}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ et il est clair que $\Phi(f) = g$. Ainsi Φ est surjective. $\square$

Exercice 32.3 (Matrices super-magiques)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathrm{A}_n = \left\{ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \forall i \in [\![1, n]\!] \; \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{ji} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_{k,n+1-k} = \gamma \right\}$$

Calculer la dimension de A_n.

Solution. On constate d'abord que A_n est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\mathrm{B}_n = \{\mathrm{M} \in \mathrm{A}_n \mid \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{ii} = 0\}$$

alors

$$\mathrm{A}_n = \mathbb{R}\mathrm{U} \oplus \mathrm{B}_n$$

et donc $\dim \mathrm{A}_n = 1 + \dim \mathrm{B}_n$.

L'étude du cas $n = 2$ donne $\dim \mathrm{B}_2 = 0$ (à cause des diagonales). Le cas $n = 3$ donne une dimension 2.

Soit $n \geq 4$. Considérons

$$\mathrm{C}_n = \left\{ \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall i \in [\![1, n]\!] \; \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{ji} = 0 \right\}$$

qui est un s.e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient B_n. Si on note

$$\mathrm{L}_i : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{ij} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_j : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{ij} \end{array} \right.$$

alors

$$\mathrm{C}_n = (\ker \mathrm{L}_1 \cap ... \cap \ker \mathrm{L}_n) \cap (\ker \mathrm{K}_1 \cap ... \cap \ker \mathrm{K}_{n-1})$$

Et donc $\mathrm{codim} \mathrm{C}_n \leq 2n-1$, d'où $\dim \mathrm{C}_n \geq (n-1)^2$.

L'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{C}_n & \to & \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \mapsto & (\mathrm{M}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \end{array} \right.$$

est bien définie et linéaire. Si $\mathrm{M} \in \ker \Phi$, alors $\mathrm{M} \in \mathrm{C}_n$ en regardant la somme de ses coefficients sur les lignes et colonnes, et enfin sur la diagonale : en effet, M s'écrit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathrm{M}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \mathrm{M}_{n1} & \cdots & & \mathrm{M}_{nn} \end{pmatrix}$$

Donc Φ est injective, et $\dim \mathrm{C}_n = (n-1)^2$.

Il reste à passer de C_n à B_n. On note

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{C}_n & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \to & \sum_{i=1}^n \mathrm{M}_{ii} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{C}_n & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \to & \displaystyle\sum_{i=1}^n \mathrm{M}_{i,n+1-i} \end{array} \right.$$

et donc $\mathrm{B}_n = \ker \mathrm{D} \cap \ker \Delta$. Ainsi $\dim \mathrm{B}_n = \dim \mathrm{C}_n - \mathrm{rg}(\Delta, \mathcal{D}) = (n-1)^2 - \mathrm{rg}(\Delta, \mathcal{D})$.

$\mathcal{D}$ et Δ sont libres : soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ tels que $\alpha\mathcal{D} + \beta\Delta = 0$. En évaluant en $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en $\begin{pmatrix} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ on obtient $\alpha = \beta = 0$. Ainsi $\dim \mathrm{B}_n = n^2 - 2n - 1$ et finalement

$$\boxed{\dim \mathrm{A}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{1,2\} \\ n(n-2) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}}$$

$\square$

Exercice 32.4. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 2$. Si $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on note $\varphi_g \in \mathrm{E}^*$ où $\forall f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})\ \varphi_g(f) = \mathrm{tr}\, fg$.

1. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})^*$ il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\varphi = \varphi_g$
2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ de dimension $n^2 - 1$ et g dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{A} = \ker \varphi_g$. Montrer que si $a \in \mathcal{A}$ alors ag est colinéaire à g.
3. En déduire que $n = 2$ et qu'il existe une droite D de E telle que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ stabilisant D.

Exercice 32.5 (Boites à faces)**.**

Exercice 32.6 (Orthogonalisée de Schmidt de $(1, \mathrm{X}, ..., \mathrm{X}^n)$ et intégrale)**.**

Chapitre 33

$\mathbb{K}$-algèbres, nombres algébriques et transcendants

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{K}$. On rappelle que $a \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$
— *ssi il existe un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ annulant a ;*
— *ssi a est solution d'une équation algébrique à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Exercice 33.1. Soit $a \in \mathbb{L}$ et les propositions :
(i) a est algébrique sur $\mathbb{K}$
(ii) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[a] < +\infty$
(iii) $\mathbb{K}[a]$ est un corps.
Montrer $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$

Solution. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ On note $\mathcal{J}_a$ l'ensemble des polynômes annulateurs de a. On a les équivalences

$$\text{a algébrique sur } \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathcal{J}_a \neq \{0\} \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[a] < +\infty.$$

$(i)\&(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit a algébrique sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}[a]$ est un sous-anneau de $\mathbb{L}$. Soit $x \in \mathbb{K}[a]$ non nul. L'application

$$\sigma_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[a] & \to & \mathbb{K}[a] \\ z & \mapsto & xz \end{array} \right.$$

est $\mathbb{K}$-linéaire, injective (puisque tout élément admet un inverse dans $\mathbb{L}$) donc est bijective (puisque par hypothèse $\dim \mathbb{K}[a] < +\infty$). Ainsi il existe $y \in \mathbb{K}[a]$ tel que $xy = 1_{\mathbb{K}}$ et $\mathbb{K}[a]$ est un corps.
$(iii) \Rightarrow (i)$ $\mathbb{K}[a]$ est un corps, en excluant le cas trivial $a = 0$, on dispose de $b \in \mathbb{K}[a]$ tel que $ba = 1_{\mathbb{K}}$ et donc *a fortiori* de $p \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(a) \times a = 1_{\mathbb{K}}$. Donc a est racine de $XP - 1$ qui est de degré strictement positif. Ainsi $\mathcal{J}_a \neq \{0\}$ et a est algébrique sur $\mathbb{K}$. □

Exercice 33.2. Trouver le polynôme minimal annulateur de $\cos \frac{2\pi}{7}$ sur $\mathbb{Q}$.

Solution. Le 7-ième polynôme de Tchebytchev annule $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et il est à coefficients entiers.
T_4 - T_3 est également annulé par $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ (on pense naturellement à cela car $\cos \frac{6\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7}$).

Méthode rapide de calcul de T_7 *(générique) :*

$$\begin{aligned}\cos 7\theta &= \mathrm{Re}(e^{7i\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^7)\mathrm{Re}\left((c+is)^7\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}c^{7-k}(is)^k\right) = \sum_{l=0}^{3}\binom{7}{2l}c^{7-2l}i^{2l}s^{2l}\\ &= \sum_{l=0}^{3}\binom{7}{2l}c^{7-2l}(-1)^l(1-c^2)^l\end{aligned}$$

$$\boxed{T_7(X) = \sum_{l=0}^{3}\binom{7}{2l}X^{7-2l}(X^2-1)^l}$$

Ainsi $\cos\frac{2\pi}{7}$ est algébrique. Si on note μ le polynôme minimal de $\cos\frac{2\pi}{7}$ alors $\mu | T_7 - 1$.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4\cos^2\theta - 3\cos\theta\\ \cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta-1)^2 - 1\\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

Ainsi $\cos\frac{2\pi}{7}$ annule

$$\begin{aligned}P &= 8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1\\ &= (X-1)(8X^2+4X^2-4X-1)\end{aligned}$$

or $\cos\frac{2\pi}{7} \neq 1$ et $\mu | 8X^3+4X^2-4X-1$. On pose $Q = 8X^3+4X^2-4X-1$. $\cos\frac{2k\pi}{7}$ annule $(X-1)Q$, pour $k = 1,2,3$.

$$Q = 8(X-\cos\frac{2\pi}{7})(X-\cos\frac{4\pi}{7})(X-\cos\frac{6\pi}{7})$$

Mais $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$ ne sont pas rationnels. Si l'un des trois est rationnel, on note $\frac{N}{D}$ sa représentation en fractions irréductibles. Alors $Q\left(\frac{N}{D}\right) = 0$.

$$8\frac{N^3}{D^3} + 4\frac{N^2}{D^2} - 4\frac{N}{D} - 1 = 0$$

$$8N^3 + 4DN^2 - 4D^2N - D^3 = 0$$

Donc $N | 8N^3 + 4DN^2 - 4D^2N$ et donc $N | D^3$ or $N \wedge D = 1$ donc $N \wedge D^3 = 1$ et $N \in \{-1, 1\}$. De même, $D | 8N^3$ donc $D | 8$ et finalement $\frac{N}{D} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$, c'est impossible.

Q n'a donc pas de racine dans $\mathbb{Q}$, tout en étant de degré 3. Finalement $\mu = \frac{1}{8}Q$

$$\boxed{X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}}$$

□

Exercice 33.3. On se place dans $\mathbb{C}$ et on note $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{A}$ est algébriquement clôt.

<u>*Solution.*</u> Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{A}[\mathrm{X}] \setminus \mathbb{A}_0[\mathrm{X}]$. Supposons P unitaire et montrons que P admet une racine dans $\mathbb{A}$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clôt, P possède une racine $z \in \mathbb{C}$. Notons

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} p_k \mathrm{X}^k$$

avec $p_d = 1$ et les p_k, $0 \leq k \leq d$, algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Posons $\mathbb{M}_0 = \mathbb{Q}$ et pour $1 \leq k \leq p-1$, posons par récurrence $\mathbb{M}_k = \mathbb{M}_{k-1}[p_k]$. Enfin, on pose $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{d-1}[z]$. z est algébrique sur $\mathbb{M}_{d-1}$ (car $p_0, ..., p_{d-1} \in \mathbb{M}_{d-1}$) donc $\dim_{\mathbb{M}_{d-1}} \mathbb{M} < +\infty$.

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{M} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{M}_1 \times ... \times \dim_{\mathbb{M}_{d-2}} \mathbb{M}_{d-1} \times \dim_{\mathbb{M}_{d-1}} \mathbb{M} < +\infty$$

or $\mathbb{Q}[z] \subset \mathbb{M}$ donc $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[z] < +\infty$ et $\boxed{z \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}}$. □

Exercice 33.4. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{L}$, algébrique sur $\mathbb{K}$. Montrer que μ_a, le polynôme annulateur minimal de a, est irréductible sur $\mathbb{K}$.

<u>*Solution.*</u> Par l'absurde. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, non constants, tels que $\mu_a = \mathrm{PQ}$. Comme $\mathbb{L}$ est un corps, $\mathrm{P}(a) = 0$ ou $\mathrm{Q}(a) = 0$, donc $\mu_a | \mathrm{P}$ ou $\mu_a | \mathrm{Q}$ avec $\deg \mathrm{P}, \deg \mathrm{Q} < \deg \mu_a$, absurde. Donc $\boxed{\mu_a \text{ est irréductible}}$. □

Exercice 33.5 (Adjonction de racines)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ irréductible, non constant. Montrer qu'il existe $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{K}$ tel que P possède une racine dans $\mathbb{L}$.
En déduire qu'il existe un sur-corps de $\mathbb{K}$ dans lequel P est scindé.

<u>*Solution.*</u> *Démonstration par les anneaux quotient.* Tout polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré 1 possède une racine dans $\mathbb{K}$, on exclut donc ce cas. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré ≥ 2. Notons $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ engendré par P, et posons

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]/\mathcal{J}$$

$\mathbb{L}$ est un anneau, dont les lois sont canoniquement induites par $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +\times)$, à travers un morphisme d'anneaux noté s. Comme $\mathcal{J} \neq \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $1_{\mathbb{L}} \neq 0_{\mathbb{L}}$. Soit $a \in \mathbb{L}$ non nul et $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $s(\mathrm{Q}) = a \neq 0$. Ainsi $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = 1$ puisque P est irréductible et ne divise pas Q. Ainsi on dispose de U et V dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{UP} + \mathrm{VQ} = 1$. Par conséquent,

$$1_{\mathbb{L}} = s(1_{\mathbb{K}[\mathrm{X}]}) = s(\mathrm{UP} + \mathrm{VQ}) = s(\mathrm{U})s(\mathrm{P}) + s(\mathrm{V})s(\mathrm{Q}) = s(\mathrm{V})a$$

et donc a possède un inverse dans $\mathbb{L}$. $\boxed{\mathbb{L} \text{ est un corps.}}$

Considérons à présent

$$j : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{L} \\ b & \mapsto & s(\tilde{b}) \text{ où } \tilde{b} \text{ polynôme constant de valeur } b \end{array} \right.$$

qui est un morphisme d'anneau. Comme $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont des corps, j est un morphisme de corps, donc injectif, car dans un corps, les idéaux sont $\{0\}$ ou le corps tout entier, or $\ker j$ est un idéal et j n'est manifestement pas nulle... Autre justification, si $x \neq 0$,

$$1_{\mathbb{K}} = xx^{-1} \quad \text{d'où} \quad 1_{\mathbb{L}} = j(x)j\left(x^{-1}\right) \quad \text{et} \quad j(x) \neq 0$$

et on identifie $j(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$. $\boxed{\mathbb{L} \text{ devient un sur-corps de } \mathbb{K}.}$

Reste à montrer que P possède une racine dans $\mathbb{L}$. Il va s'agir de la classe de X. Posons $\omega = s(\mathrm{X})$. $s(p_k) = p_k$ pour $0 \leq k \leq d$ et

$$\mathrm{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{d} p_k \omega^k = \sum_{k=0}^{d} p_k s(\mathrm{X})^k = s\left(\sum_{k=0}^{d} p_k \mathrm{X}^k\right) = s(\mathrm{P}) = 0$$

$\boxed{\text{P possède une racine dans } \mathbb{L}.}$ On procède ensuite par récurrence sur le degré de P, en réalisant des extensions de corps successives, pour montrer qu'il existe un sur-corps de $\mathbb{K}$ dans lequel P est scindé. $\square$

Exercice 33.6 (Ulm)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps infini, $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre, x et y dans $\mathcal{A}$ et algébriques sur $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[y]$ est monogène.

Solution. Un bon candidat semble être (x, y), et on se rend plus ou moins vite compte que son polynôme minimal annulateur est $\mu_x \vee \mu_y$. Dans le cas où $\mu_x \wedge \mu_y = 1$, (x, y) convient. Sinon, il convient de modifier légèrement x en $x' = x + \lambda 1_{\mathcal{A}}$ où λ peut bel et bien être choisi de telle sorte que $\mu_{x'} \wedge \mu_y = 1$; on aura constaté que $\mu_{x'} = \mu_x(\mathrm{X} - \lambda)$ et qu'on a le choix de λ, puisque $\mathbb{K}$ est infini. $\square$

Chapitre 34

Réduction

Exercice 34.1. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ où

$$f_\alpha : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\alpha x} \end{array}\right.$$

est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Solution. Notons D l'opérateur de dérivation. Si $\alpha \in \mathbb{C}$, f_α est un vecteur propre de D associé à la valeur propre α. Les espaces propres étant en somme directe, la famille $\boxed{(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}} \text{ est libre}}$. ☐

Exercice 34.2. Montrer que la famille $((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}})_{\lambda\in\mathbb{C}}$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Solution. Même chose que pour l'exercice précédent, cette fois-ci avec l'opérateur de translation. ☐

Exercice 34.3 (Suites à récurrence linéaire)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour $\mathrm{P} = \mathrm{X}^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on note

$$\mathrm{S(P)} = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+d} + \sum_{k=0}^{d-1} a_k u_{n+k} = 0 \right\}$$

1. Montrer que S(P) est un s.e.v de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de dimension finie.
2. On note σ l'opérateur de translation. Montrer

$$\mathrm{S(P)} = \ker \mathrm{P}(\sigma)$$

3. On suppose P scindé à racines simples. Montrer

$$\mathrm{S(P)} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{K}(\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_s$ sont les racines distinctes de P.

4. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\nu \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{S}((\mathrm{X}-\lambda)^\nu) = \{(\mathrm{P}(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \mathrm{P} \in \mathbb{K}_{\nu-1}[\mathrm{X}]\}$$

Solution. **1.** L'application

$$V : \left\{ \begin{array}{rcl} S(P) & \to & \mathbb{K}^d \\ u & \mapsto & (u_0, ..., u_d) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc $\dim S(P) = d < +\infty$.

2. C'est clair.

3. Si $P_1, ..., P_s \in \mathbb{K}[X]$ sont deux à deux premiers entre eux, et $P = P_1...P_s$, alors d'après le lemme des noyaux,

$$S(P) = \bigoplus_{i=1}^{s} S(P_i)$$

et il suffit d'appliquer cela à $P_i = (X - \lambda_i)$ pour obtenir le résultat.

4. (...)

□

Exercice 34.4 (Cayley-Hamilton : endomorphismes cycliques)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe $u \in \mathbb{E}$ tel que $\mathbb{K}[f].u = E$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Calculer χ_f.

2. Montrer que $\chi_f(f) = 0$.

Solution. **1.** On pose $\mathcal{B} = (u, f(u), ..., f^{d-1}(u))$ base de E. Soient $a_0, ..., a_{d-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f^d(u) = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k f^k(u)$$

On considère la matrice compagnon

$$F = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

dont on montre par récurrence sur d que le polynôme caractéristique est $\chi_F = (-1)^d(X^d + a_{d-1} + ... + a_0)$.

Pour $d = 2$, $F = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $\det(F - XI_n) = \begin{vmatrix} -X & -a_0 \\ 1 & -X - a_1 \end{vmatrix} = X^2 + a_1X + a_0$.

Soit $d \geq 2$ tel que la formule soit vraie au rang d. Prouvons-le au rang $d+1$.

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{F}} &= \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\mathrm{X} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\mathrm{X}-a_{d-1} \end{vmatrix} \\
&= -\mathrm{X} \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\mathrm{X} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\mathrm{X}-a_{d-1} \end{vmatrix} + (-a_0)(-1)^{1+d+1} \begin{vmatrix} 1 & -\mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\mathrm{X} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\mathrm{X}((-1)^d(\mathrm{X}^d + a_d\mathrm{X}^{d-1} + \ldots + a_1)) + (-1)^{d+1}a_0 \\
&= (-1)^{d+1}(\mathrm{X}^{d+1} + a_d\mathrm{X}^d + \ldots + a_0)
\end{aligned}
$$

et la récurrence se propage.

$$\boxed{\chi_f = (-1)^d(\mathrm{X}^d + a_{d-1} + \ldots + a_0)}$$

2. On reprend $\mathcal{B}$ la base de E définie précédemment. On a $\chi_f(f)(u) = 0$ d'après ce qui précède. En composant successivement par f, on obtient $\chi_f(f)(f^k(u)) = 0$ pour tout $0 \leq k \leq d-1$. Par conséquent, $\boxed{\chi_f(f) = 0}$.

□

Exercice 34.5 (Cayley-Hamilton : cas général)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que

$$\chi_f(f) = 0$$

Solution. Soit $v \in \mathrm{E}$. Montrons que $\chi(f).v = 0$. Posons $\mathrm{F} = \mathbb{K}[f].v = \{\mathrm{P}(f).v \mid \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$. On a

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vec}(\{f^k(v) \mid k \in \mathbb{N}\}) = \bigoplus_{i=0}^{\delta-1} \mathbb{K}f^i(v)$$

où $\delta = \deg \mu_{f,v}$. F est stable par f et on note φ l'induit de f sur F.

(F, φ) est cyclique, de générateur v, donc $\chi_\varphi(\varphi) = 0$. Mais $\chi_\varphi | \chi_f$ (prendre une base de F complétée en une base de E, et regarder la matrice de f dans cette base). On constate que $\chi_f(f) = \mathrm{B}\chi_\varphi(f)$ annule bien v, puisque $f^k(v) = \varphi^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Exercice 34.6. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que si u possède une valeur propre, il existe un hyperplan stable par u.

Solution. Soit λ une valeur propre de u. $u - \lambda \mathrm{id_E}$ n'est pas injective, *a fortiori* non surjective (dimension finie) et

$$\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{id_E}) \subsetneq \mathrm{E}$$

donc il existe un hyperplan H contenant $\mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{id_E})$.

Soit $x \in \mathrm{H}$.

$$u(x) - \lambda x = y \in \mathrm{H}$$

et donc

$$u(x) = y + \underbrace{\lambda x}_{\in \mathrm{H}} \in \mathrm{H}$$

Ainsi H est stable par u. □

Exercice 34.7. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
Montrer que u est diagonalisable ssi χ_u est scindé et chaque s.e.v de E stable par u possède un supplémentaire stable.

Solution. CONDITION NÉCESSAIRE. Si u est diagonalisable, χ_u est scindé. Soit $e_1, ..., e_n$ une base qui diagonalise u et F un sous-espace vectoriel stable par u, dont on note $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p$ une base que l'on complète avec des vecteurs de $\{e_1, ..., e_n\}$ en une base de E. On note $\mathrm{G} = \mathrm{V}ect(\varepsilon_{p+1}, ..., \varepsilon_n)$ qui est évidemment stable par u, puisque généré par des vecteurs propres, et on a bien $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

CONDITION SUFFISANTE. On suppose χ_u scindé. Par conséquent,

$$\mathcal{G} = \{\mathrm{F} \text{ s.e.v de E stable par } u \text{ et } u_{|\mathrm{F}} \text{ diagonalisable}\}$$

est non vide, puisqu'il contient au moins une droite. Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{G}$ de dimension maximale, et supposons par l'absurde que $\mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$.

Soit G un supplémentaire de F stable par u. On note g la restriction de u à G, et f à F. Dans ce cas, $\chi_g | \chi_u$. Or χ_u est scindé, donc χ_g également. Mais $\dim \mathrm{G} \geq 1$ donc χ_g a une racine μ. Soit $x \in \mathrm{G} \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \mu x$.

Soit β une base de F qui diagonalise f. (β, x) est une base de $\mathrm{F} \oplus \mathbb{K}x = \mathrm{H}$ qui diagonalise la restriction de u à H. Or $\dim \mathrm{H} > \dim \mathrm{F}$ et $\mathrm{H} \in \mathcal{G}$. Absurde. Donc $\mathrm{F} = \mathrm{E}$. □

Exercice 34.8. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré $\operatorname{rg} \mathrm{A} + 1$.

Solution. Considérons f l'endomorphisme canoniquement associé à A et $\epsilon_1, ..., \epsilon_r$ une base de $\operatorname{Im} f$ complétée en une base de $\mathbb{K}^n$, notée β.

$$\mathrm{M} = [f]_\beta = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $\mathrm{P} = \chi_{\mathrm{U}}$. C'est là que la magie opère :

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}) \times \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{W} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U} & \mathrm{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

et ainsi M annule PX qui est de degré $r + 1$. On peut également le voir géométriquement : si $x \in \mathrm{K}^n$,

$$\mathrm{P}(f)(f(x)) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{P}(f)((f(x))_i \epsilon_i) + \sum_{i=r+1}^{n} ((f(x))_i \epsilon_i) = \sum_{i=r+1}^{n} (\epsilon_i^*(f(x)) \epsilon_i) = 0$$

□

Exercice 34.9. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(0) = 0$, $\mathrm{P}'(0) \neq 0$ et $\mathrm{P}(f) = 0$.
Montrer que $\mathrm{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

<u>*Solution*</u>. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{XQ}$ et $\mathrm{Q}(0) \neq 0$. Le lemme des noyaux fourni

$$\mathrm{E} = \ker \mathrm{P}(f) = \ker f \oplus \ker \mathrm{Q}(f)$$

et il suffit de prouver que $\ker \mathrm{Q}(f) = \mathrm{Im}\, f$.

Notons $\mathrm{Q} = a_0 + a_1\mathrm{X} + ... + a_t\mathrm{X}^t$ avec $a_0 \neq 0$. Soit $x \in \ker \mathrm{Q}(f)$.

$$x = \frac{-a_1 f(x) - ... - a_t f^t(x)}{a_0} \in \mathrm{Im}\, f$$

Reste à prouver $\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{0\}$. Soit $y \in \mathrm{Im}\, f \cap \ker f$ et $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{P}(f)(x) &= a_0 f(x) + ... + a_t f^{t+1}(x) \\ &= a_0 f(x) + \mathrm{Q}(f)(y) \\ &= a_0 f(x) \end{aligned}$$

or $a_0 \neq 0$ donc $f(x) = 0$ et $y = 0$.

$$\boxed{\mathrm{E} = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f}$$

□

Exercice 34.10. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour que

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

<u>*Solution*</u>. Condition nécessaire. On a $\chi_{\mathrm{M}} = \chi_{\mathrm{A}}^2$. Supposons M diagonalisable. Alors M annule un polynôme scindé à racine simple, donc A aussi, puisque pour tout $\Pi \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$,

$$\Pi(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \Pi(\mathrm{A}) & 0 \\ * & \Pi(\mathrm{A}) \end{pmatrix}$$

On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A. Puisque A est diagonalisable, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & \lambda_n & & & \\ \lambda_1 & & 0 & \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mais en voyant cette matrice comme la matrice d'un endomorphisme f d'un e.v.n de dimension n dans une base $e_1, ..., e_2n$, elle est semblable à la matrice de f dans la base $(e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, ..., e_n, e_{2n})$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ \lambda_1 & \lambda_1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_n & \\ & 0 & & \lambda_n & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et par conséquent pour tout $1 \leq i \leq n$, la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_i & \\ \lambda_i & \lambda_i \end{pmatrix}$ est diagonalisable ; or elle ne possède qu'une seule valeur propre, elle est donc scalaire, ce qui impose $\lambda_i = 0$. Donc $\mathrm{A} = 0$.
Condition suffisante. C'est clair.

$$\boxed{\mathrm{M} \text{ diagonalisable } \Longleftrightarrow \mathrm{A} = 0}$$

□

Exercice 34.11. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$.
Montrer

$$\mathrm{M} \text{ trigonalisable } \Longleftrightarrow \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{C} \text{ trigonalisables}$$

Solution. Condition nécessaire. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ scindé tel que $\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0$. Alors

$$0 = \mathrm{P}(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & * \\ 0 & \mathrm{P}(\mathrm{C}) \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{C}) = 0$, d'où A et C trigonalisables.

Condition suffisante. Soient P et Q deux polynômes annulant respectivement A et C. Alors

$$\mathrm{PQ}(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{U} \\ 0 & \mathrm{P}(\mathrm{C}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Q}(\mathrm{A}) & \mathrm{V} \\ 0 & \mathrm{Q}(\mathrm{C}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{U} \\ 0 & \mathrm{P}(\mathrm{C}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(\mathrm{A}) & \mathrm{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

donc M est trigonalisable. □

Exercice 34.12 (Produit tensoriel)**.** Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Considérons

$$\Phi_{\mathrm{A}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ \mathrm{M} & \mapsto & \mathrm{AM} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Psi_{\mathrm{A}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \\ \mathrm{M} & \mapsto & \mathrm{MA} \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice de Φ_{A} dans la base canonique des $(\mathrm{E}^{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
2. Montrer l'équivalence

$$\Phi_{\mathrm{A}} \text{ diagnonalisable } \Leftrightarrow \mathrm{A} \text{ diagonalisable}$$

   ainsi qu'une équivalence semblable pour Ψ_{A}.
3. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$ et $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{AMB}$ sont diagonalisables.

Solution. **1.** La matrice $\mathrm{AE}^{i,j}$ comporte que des zéros sauf dans sa $j^{\text{ème}}$colonne, où l'on trouve la $i^{\text{ème}}$ colonne de A. Par conséquent,

$$[\Phi_A]_{(E^{i,j})_{1\leq i,j\leq n}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{matrix} & & \\ & A & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}$$

et donc on en déduit ce qu'il faut :

$$\chi_{\Phi_A} = (\chi_A)^n$$

$$\det \Phi_A = (\det A)^n$$

$$\operatorname{tr} \Phi_A = n \operatorname{tr} A$$

$$\mu_{\Phi_A} = \mu_A$$

2. A est diagonalisable si et seulement si μ_A est scindé à racines simples si et seulement si μ_{Φ_A} est scindé à racines simples. On remarque aussi que

$$E_{\lambda,\Phi_A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = \lambda M\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{Im} M \subset E_{\lambda,A}\}$$

3. On constate que Φ_A et Ψ_B commutent. Si A et B sont diagonalisables, il en est de même pour Φ_A et Ψ_B, qui sont donc codiagonalisables. Par conséquent, $\Phi_A + \Psi_B$ et $\Phi_A \circ \Psi_B$ sont diagonalisables.

□

Exercice 34.13. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto AM + MB$
Déterminer les valeurs propres de Φ à l'aide de celles de A et B.

Solution. On va montrer que $Sp(\Phi) = Sp(A) + Sp(B)$.

Soient λ et μ des valeurs propres respectivement de A et B, et soient X et Y des vecteurs propres de A et ^{t}B respectivement associés à λ et μ. On constate alors que $X\,{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un vecteur propre associé à $\lambda + \mu$.

Soit $\gamma \in Sp(\Phi)$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $\Phi(M) = \gamma M$. On tire par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad MB^k = (\gamma I_n - A)^k M$$

d'où par linéarité

$$\forall \Pi \in \mathbb{C}[X] \quad M\Pi(B) = \Pi(\gamma I_n - A)M$$

ce qui fournit en appliquant à χ_B :

$$0 = \chi_B(\gamma I_n - A)M$$

et donc il existe une valeur propre μ de B telle que $\mu - \gamma I_n - A$ est non injective, ce qui signifie qu'il existe λ valeur propre de A telle que $\lambda + \mu = \gamma$.

$$\boxed{Sp(\Phi) = Sp(A) + Sp(B)}$$

□

Exercice 34.14. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. Montrer

$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 \text{ diagonalisable et } \ker \mathrm{A} = \ker \mathrm{A}^2$$

2. On suppose $\mathrm{K} = \mathbb{R}$. Montrer

$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 \text{ diagonalisable avec } Sp(\mathrm{A}) \subset \mathbb{R}_+ \text{ et } \ker \mathrm{A} = \ker \mathrm{A}^2$$

Solution. **1.** CONDITION NÉCESSAIRE. Toujours vérifié.

CONDITION SUFFISANTE. Supposons $\ker \mathrm{A} = \ker \mathrm{A}^2$. Soit P un polynôme scindé à racines simples annulant A^2, que l'on note, quitte à le multiplier par X,

$$\mathrm{P} = \mathrm{X} \prod_{i=1}^{s} (\mathrm{X} - z_i)$$

et on choisi y_i tel que $y_i^2 = z_i$. Ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^2 \prod_{i=1}^{s} (\mathrm{X} - y_i)(\mathrm{X} + y_i)$$

est un polynôme scindé à racines simples, hormis zéro, et le lemme des noyaux fournit

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^n &= \ker \mathrm{A}^2 \oplus \bigoplus_{1 \le i \le s} \ker(\mathrm{A} - y_i \mathrm{I}_n) \oplus \bigoplus_{1 \le i \le s} (\mathrm{A} + y_i \mathrm{I}_n) \\ &= \ker \mathrm{A} \oplus \bigoplus_{1 \le i \le s} \ker(\mathrm{A} - y_i \mathrm{I}_n) \oplus \bigoplus_{1 \le i \le s} (\mathrm{A} + y_i \mathrm{I}_n)\end{aligned}$$

2. Il suffit de reprendre soigneusement l'étude.

□

Exercice 34.15. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que f possède n valeurs propres distinctes $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$. Montrer que f est cyclique.

Solution. Soit $e_1, ..., e_n$ une base de vecteurs propres de f tels que $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $1 \le i \le n$. Posons $x = e_1 + ... + e_n$ et considérons la matrice de $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ dans la base des $(e_i)_{1 \le i \le n}$. Elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On reconnait ici une matrice de Vandermonde, de déterminant non nul. Ainsi f est cyclique, puisque $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est une base de E. □

Exercice 34.16. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in \{1, ..., n\} \quad \operatorname{tr} \mathrm{A}^k = 0$.
Montrer que A est nilpotente.

Solution. Supposons par l'absurde que A n'est pas nilpotente. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_s$ les valeurs propres non nulles et deux à deux distinctes de A, d'ordre $\omega_i \ge 1$, $n \ge s \ge i \ge 1$.

Pour $k = 1, ..., n$,

$$\sum_{i=1}^{s} \omega_i \lambda_i^k = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^k)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^s & \cdots & \lambda_s^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{\mathrm{S}} \end{pmatrix} = 0$$

On reconnait ici une matrice de Vandermonde inversible, d'où $0 = \omega_1 = ... = \omega_s$, ce qui est absurde. $\square$

Exercice 34.17 (Matrices circulantes)**.** Réduire

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution. On constate aisément que $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_n$. Ainsi les valeurs propres de M sont les racines n-èmes de l'unité, et si $\zeta \in \mathbb{U}_n$ on constate que

$$\mathrm{M} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix} = \zeta^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \cdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$$

ce qui fournit les vecteurs propres associés aux valeurs propres que l'on a trouvées. Ainsi une base de vecteurs propres est donnée par la matrice $\mathrm{P} = \left[e^{\frac{2i\pi(k-1)(l-1)}{n}}\right]_{1 \leq k,l \leq n}$ et on a alors

$$\mathrm{M} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{-2i\pi/n} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-2i(n-1)\pi/n} \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}$$

$\square$

Exercice 34.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{M}^p = \mathrm{I}_n\}$.
Déterminer l'adhérence de Γ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution. On va montrer que $\overline{\Gamma} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid Sp(\mathrm{M}) \subset \mathbb{U}\}$, ensemble que l'on note γ.

Montrons que $\overline{\Gamma} \subset \gamma$. Soit $\mathrm{M} \in \overline{\Gamma}$ et $(\mathrm{M}_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de Γ tel que $\mathrm{M}_p \to \mathrm{M}$. L'hypothèse fournit que les valeurs propres de M_p sont de module 1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)$ les racines complexes de χ_{M_p}. La suite $(\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p))$ est à valeur dans un compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente à l'aide d'une extractrice $\varphi(p)$, dont on note $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la limite. Comme $\chi_M = \underset{p\to\infty}{\rightarrow} \chi_{M_p}$,

$$\chi_M = \lim_{p\to\infty} \chi_{M_{\varphi(p)}} = \lim_{p\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i(\varphi(p))) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

et donc $M \in \gamma$.

Montrons maintenant que $\gamma \subset \overline{\Gamma}$. Soit $M \in \gamma$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres, toutes de module 1. M est semblable (dans une base dont on note Q la matrice de passage) à une matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Il suffit de construire une suite de n-uplets formés de racines de l'unité deux à deux distinctes, que l'on note $(\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)$, et qui converge vers $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et de considérer

$$M_p = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1(p) & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2(p) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n(p) \end{pmatrix} Q$$

qui est diagonalisable et on constate alors que $M_p \in \Gamma$, avec $M_p \to M$.

□

Exercice 34.19. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$(\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \mid AP = PB) \iff Sp(A) \cap Sp(B) \neq \varnothing$$

Solution. Condition suffisante. Soit $\lambda \in Sp(A) \cap Sp(B)$. Soit X un vecteur propre de A associé à λ et Y un vecteur propre de ${}^t B$ associé à λ. Posons $P = X\,{}^tY \neq 0$.

$$AX\,{}^tY = X\lambda\,{}^tY = X\,{}^t(\lambda Y) = X\,{}^t({}^tBY) = X\,{}^tYB$$

$$AP = PB$$

Condition nécessaire.

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AP = PB$. Par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^kB = PB^k$ et on en déduit que pour tout $\Pi\mathbb{C}[X]$, $\Pi(A) = \Pi(B)$.

Supposons alors par l'absurde que $Sp(A) \cap Sp(B) = \varnothing$. Ainsi $\chi_A \wedge \chi_B = 1$ et $0 = P\chi_A(B)$. Mais $\chi_A(B)$ est inversible : on dispose de U et V polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $1 = U\chi_A + V\chi_B$, ce qui donne $I_n = U(B)\chi_A(B)$. On a donc $P = 0$, absurde. □

Exercice 34.20. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer les équivalences suivantes :

$$f^p \to 0 \iff \forall\,\lambda \in Sp(f)\ |\lambda| < 1 \tag{i}$$

$$(f^p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \iff \forall\,\lambda \in Sp(f)\ |\lambda| \leq 1 \tag{ii}$$

$$(f^p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff \forall\,\lambda \in Sp(f)\ |\lambda| < 1 \text{ ou } \lambda = 1 \tag{iii}$$

<u>*Solution.*</u> $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sont donc équivalentes. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de f, comptées avec leur multiplicité.

(i) Condition nécessaire. Soit $\mathcal{B}$ une base qui diagonalise f. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$[f^p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est homéomorphe à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $[.]_{\mathcal{B}}$ et donc $\lambda_i^p \to 0$ ce qui fournit $|\lambda_i| < 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Condition suffisante. C'est clair.

(ii) Même démonstration : $(f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$ $(\lambda_i^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(iii) $(f^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$ $(\lambda_i^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Il suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 34.20.1.

$$\{z \in \mathbb{C} \mid : \ (z^p)_{p\in\mathbb{N}} \textit{ converge}\} = \mathrm{B}_o(0,1) \cup \{1\}$$

Preuve : Dans le cas où $|z| = 1$, comme $|z-1| = |z^{p+1} - z^p| \to 0$, $z = 1$.

□

Exercice 34.21. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui annule un polynôme scindé P. Montrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f. [a]

[a] Ce lemme est utile pour démontrer que f est trigonalisable si et seulement si f annule un polynôme scindé.

<u>*Solution.*</u> Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Posons $\mathrm{A} = [f]_{\mathcal{B}}$ et remarquons que ${}^t\mathrm{A}$ annule P. Puisque ${}^t\mathrm{A}$ annule $\chi_{{}^t\mathrm{A}} \wedge \mathrm{P}$, ${}^t\mathrm{A}$ possède une valeur propre λ. Soit $\mathrm{C} \in \mathbb{K}^n$ tel que ${}^t\mathrm{AC} = \lambda\mathrm{C}$. On note $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et on pose

$$\mathrm{H} = \left\{ x_1e_1 + ... + x_ne_n \in \mathrm{E} \ \middle| \ x_1, ..., x_n \in \mathbb{K} \text{ et } \sum_{i=1}^n c_ix_i = 0 \right\}$$

(qui n'est rien d'autre que l'orthogonal de $\{\sum_{i=1}^n c_ie_i\}$ pour le produit scalaire canoniquement associé à $\mathcal{B}$). H est un hyperplan de E stable par f. Soit $x \in \mathrm{H}$.

$${}^t\mathrm{CA}[x]_{\mathcal{B}} = \lambda{}^t\mathrm{C}[x]_{\mathcal{B}} = 0$$

et donc $f(x) \in \mathrm{H}$. □

Chapitre 35

Réduction : compléments

Exercice 35.1 (Endomorphismes cocodiagonalisables)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et A une partie de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose les éléments de A commutent et sont diagonalisables. Montrer qu'il existe une base dans laquelle ils sont tous diagonalisables.

Solution.

Lemme 35.1.1. *Soit u et v deux endomorphismes qui commutent. Alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.*

Lemme 35.1.2. *Soit f un endomorphisme diagonalisable de* E*, et* F *un s.e.v de* E *stable par f. Alors l'induit de f sur* F *est diagonalisable.*

On montre à présent le résultat attendu par récurrence sur la dimension de l'espace, notée d. Si $d = 1$, c'est vrai : tous les endomorphismes de E sont des homothéties. Soit $d \geq 2$ tel que la propriété soit vraie pour tout espace vectoriel de dimension $k \in \{1, ...d-1\}$.

Si $\mathrm{A} \subset \mathbb{K}\mathrm{id}$, alors toute base convient. Sinon, soit $\varphi \in \mathrm{A} \setminus \mathbb{K}\mathrm{id}$. On choisit $\lambda \in Sp(\varphi)$ et on note F le sous-espace propre associé à λ. On a $\{0\} \neq \mathrm{F} \neq \mathrm{E}$ et

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \quad \text{où} \quad \mathrm{G} = \bigoplus_{\mu \in Sp(\varphi) \setminus \{\lambda\}} \mathrm{E}_{\mu,\varphi}$$

avec $\{0\} \neq \mathrm{G} \neq \mathrm{E}$. Ainsi $1 \leq \dim \mathrm{F}, \dim \mathrm{G} \leq d-1$. Considérons alors à bon droit

$$\mathrm{A_F} = \{f_{|\mathrm{F}} \mid f \in \mathrm{A}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{A_G} = \{f_{\mathrm{G}} \mid f \in \mathrm{A}\}$$

Les éléments de $\mathrm{A_F}$ et de $\mathrm{A_G}$ sont diagonalisables et commutent. On applique le lemme à $(\mathrm{F}, \mathrm{A_F})$ et à $(\mathrm{G}, \mathrm{A_G})$. On obtient deux bases que l'on réuni en une seule. Celle-ci diagonalise tous les éléments de A, et la propriété au rang d est prouvée ; la récurrence se propage. □

Exercice 35.2 (Caractérisation des endomorphismes cycliques)**.** Soient E un $\mathbb{C}$-e.v de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$(\exists\, x \in \mathrm{E} \mid (x, f(x), ..., f^{n-1}(x)) \text{ base de E }) \iff (\forall \lambda \in Sp(f) \quad \dim \mathrm{E}_{\lambda,f} = 1)$$

<u>*Solution*</u>. CONDITION NÉCESSAIRE. Soit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\beta = (x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est une base de E. Alors on dispose de $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $f^n(x) + a_{n-1}f^{n-1}(x) + ... + a_1 f(x) + a_0 = 0$ et

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si $\lambda \in Sp(f)$, on constate en observant les lignes de

$$[\lambda \mathrm{id} - f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ & & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

qu'elle est de rang $\geq n-1$. Donc $\dim \ker(\lambda \mathrm{id} - f) \leq 1$. Mais λ est valeur propre de f, donc finalement $\ker(\lambda \mathrm{id} - f)$ est une droite vectorielle.

CONDITION SUFFISANTE. On suppose que chaque sous-espace propre de f est de dimension 1. On note

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{\omega_i} \qquad \mu_f = \prod_{i=1}^{s} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{\nu_i}$$

avec $1 \leq \nu_i \leq \omega_i$.

Lemme 35.2.1. *Si* $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *et* $u_k = \dim \ker g^k$ *alors pour tout* $k \geq 1$ $\quad u_{k+1} - u_k \leq u_k - u_{k-1}$ *(la suite s'«essouffle»).*

Preuve. Considérer les endomorphismes induits sur les images. ◊

Lemme 35.2.2. *Pour tout* $\lambda \in Sp(f)$, $\ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\omega(\lambda)} = \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\nu(\lambda)}$.

Preuve. Soit $\lambda \in Sp(f)$. D'une part,

$$\ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\nu_i} \subset \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\omega_i}$$

D'autre part,

$$\mathrm{E} = \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\nu_i} \subset \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\omega_i} = \mathrm{E}$$

et donc $ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\nu_i} = \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\omega_i}$. ◊

Lemme 35.2.3. *Pour tout* $\lambda \in Sp(f)$, $\dim \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\omega(\lambda)} = \omega(\lambda)$.

Preuve. Pour $1 \leq j \leq s$, notons f_j l'induit de f sur $\mathrm{F}_j = \ker(f - \lambda_j \mathrm{id})^{\omega_j}$. Alors, $f = \overset{s}{\underset{j=1}{\oplus}} f_j$ et donc $\chi_f = \prod_{k=1}^{s} \chi_{j_k}$. Une valeur propre de f_j ne peut être que λ_j, et donc $\chi_{f_j} = (\mathrm{X} - \lambda_j)^{\dim \mathrm{F}_j}$. Mais $\chi_f = \prod_{j=1}^{s} (\mathrm{X} - \lambda_j)^{\omega_j}$. Donc $\dim \mathrm{F}_j = \omega_j$. ◊

Lemme 35.2.4. *Pour tout* $\lambda \in Sp(f)$,

$$\nu(\lambda) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker(f - \lambda \mathrm{id})^k = \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{k+1}\}$$

Preuve. Notons $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker(f - \lambda \mathrm{id})^k = \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{k+1}\}$. Si $k \geq \nu_i$ alors

$$\mathrm{E} = \overset{s}{\underset{j=1}{\oplus}} \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\nu_i} \subset \underset{j \neq i}{\oplus} \ker(f - \lambda \mathrm{id})^{\nu_j} \oplus \ker(f - \lambda \mathrm{id})^k = \mathrm{E}$$

et donc $\ker(f-\lambda \mathrm{id})^{\nu_i} = \ker(f-\lambda \mathrm{id})^k$. D'où $\nu_i \geq m$.

Par l'absurde, si $\nu_i > m$, alors $\dim\ker(f-\lambda \mathrm{id})^{\nu_i} = \dim\ker(f-\lambda \mathrm{id})^m$ et donc $(\mathrm{X}-\lambda_i)^m \prod_{j\neq i}(\mathrm{X}-\lambda_j)^{\nu_j}$ annule f tout en étant non nul et de degré $< \deg \mu_f$, absurde ! ♢

Montrons alors que $\chi_f = \mu_f$. Avec les notations du premier lemme,

$$\dim\ker(f-\lambda_i \mathrm{id})^{\nu_i} = \sum_{k=1}^{\nu_i} \underbrace{u_k - u_{k-1}}_{\leq 1}$$

car $u_1 - u_0 = \dim\ker(f-\lambda_i \mathrm{id}) = 1$. Mais le quatrième lemme que nous avons montré fournit $u_k - u_{k-1} \geq 1$ pour tout $1 \leq k \leq \nu_i$. Par conséquent,

$$\dim\ker(f-\lambda_i \mathrm{id})^{\nu_i} = \sum_{k=1}^{\nu_i} u_k - u_{k-1} = \sum_{k=1}^{\nu_i} 1 = \nu_i$$

et donc

$$\nu_i = \dim\ker(f-\lambda_i \mathrm{id})^{\nu_i} = \dim\ker(f-\lambda_i \mathrm{id})^{\omega_i} = \omega_i$$

d'où

$$\chi_f = \mu_f$$

Il ne reste plus qu'à prouver le lemme :

Lemme 35.2.5. *Si $\mu_f = \chi_f$ alors f est cyclique.*
Preuve. (Valable pour un corps infini.)

$$\mathbb{C}[f].x = \{\mathrm{P}(f).x \mid \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]\} \qquad \mathrm{I}_{f,x} = \mu_{f,x}\mathbb{C}[\mathrm{X}]$$

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\mu_{f,x} | \mu_f$. Donc il existe $x_1, ..., x_t \in \mathrm{E}$ tels que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{i=1}^{t} \ker \mu_{f,x_i}(f)$$

E est ainsi une union de sous-espaces vectoriels ; d'après l'exercice 30.7, il existe k tel que $\mathrm{E} = \ker \mu_{f,x_k}$. Le lemme est prouvé. ♢

$$\boxed{f \text{ cyclique } \Leftrightarrow \forall\, \lambda \in Sp(f),\ \dim \mathrm{E}_\lambda = 1}$$

□

Exercice 35.3. Soit E un $\mathbb{C}$-e.v de dimension finie d.

1. Chercher les $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que $\forall x \in \mathrm{E}$, $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini.
2. Traduire la condition trouvée en termes de polynôme minimal.

Solution. **1.** CONDITION NÉCESSAIRE. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\forall x \in \mathrm{E}$, $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini. Soit λ une valeur propre non nulle de f, et $u \in \mathrm{E}$ un vecteur propre associé. Par hypothèse, $\{\lambda^n u \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini. Donc $\{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini et on dispose de $p < q$ tels que $\lambda^p = \lambda^q$, d'où $\lambda^{q-p} = 1$ et finalement λ est racine de l'unité. Ainsi

$$Sp(f) \subset \mathbb{U}_\infty \cup \{0\}$$

Soit $\lambda \in Sp(f) \setminus \{0\}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda^q = 1$. Notons $\mathrm{F} = \ker(f - \lambda \mathrm{id_E})^\omega$ le sous-espace caractéristique associé à f et f_λ l'induit de f sur F. On a donc $f_\lambda = \lambda_i \mathrm{id_F} + \nu$ avec ν nilpotent. Pour tout $x \in \mathrm{F}$ et $n \geq \omega$,

$$f_\lambda^n(x) = (\lambda x = \nu(x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \nu^k(x) = \sum_{k=0}^{\omega-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \nu^k(x)$$

Supposons par l'absurde que $\nu \neq 0$, c'est-à-dire $\ker \nu \neq \mathrm{F}$, et choisissons $x \in \ker \nu^2 \setminus \ker \nu$, de telle sorte que $f_\lambda^n(x) = \lambda^n x + n\lambda^{n-1}\nu(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\underbrace{\|f_\lambda^n(x)\|}_{\text{borné}} \geq -\|x\| + \|n\lambda^{n-1}\nu(x)\| \geq n\|\nu(x)\| - \|x\| \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \to \infty$$

c'est absurde. Donc $\nu = 0$.

Condition suffisante. Supposons à présent que $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ soit tel que $Sp(f) \subset \mathbb{U}_\infty \cup \{0\}$ et tout sous-espace propre associé à $\lambda \in \mathbb{U}_\infty$ est réduit au sous-espace caractéristique. Alors

$$f = \underset{\lambda \in Sp(f)}{\oplus} f_\lambda \text{ d'où } f^n = \underset{\lambda \in Sp(f)}{\oplus} f_\lambda^n$$

et pour tout $\lambda \in Sp(f)$, f_λ^n ne prend qu'un nombre fini de valeurs pour tout $x \in \mathrm{F}_\lambda$: si $\lambda = 0$, f_λ est nilpotent. Sinon, $f_\lambda = \mathrm{id}_{\mathrm{F}_\lambda}$ et puisque λ est racine de l'unité, pour tout $x \in \mathrm{F}_\lambda$ l'ensemble $\{\lambda^n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{E}, \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ est fini } \Longrightarrow Sp(f) \subset \mathbb{U}_\infty \cup \{0\} \text{ et } (\lambda \neq 0 \Rightarrow \mathrm{E}_\lambda = \mathrm{F}_\lambda)}$$

2.

$$\boxed{\exists\, \lambda \in \mathbb{N}\ \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{U}_\infty \text{ distincts}, \mu_f = \mathrm{X}^\alpha(\mathrm{X} - \lambda_1)...(\mathrm{X} - \lambda_s)}$$

□

Exercice 35.4. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie n. Montrer que

$$\Omega = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid \deg \mu_u = n\}$$

est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Solution. En fait,

$$\Omega = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid (id, u, ..., u^{n-1}) \text{ libre}$$

et il suffit donc de prouver le lemme suivant :

Lemme 35.4.1. *Soit* V *un* $\mathbb{R}$*-e.v de dimension* d *et* $p \in \{1, ...d\}$. *Alors*

$$\mathrm{U} = \{(v_1, ..., v_p) \in \mathrm{V}^p \mid (v_1, ..., v_p) \text{ libres}\}$$

est un ouvert de V^p.

Preuve. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_d)$ une base de V et $(v_1, ..., v_p) \in \mathrm{U}$. Notons $\mathrm{M} = [v_1, ..., v_p]_\mathcal{B}$. Alors

$$\mathrm{M} = (e_i^*(v_j))_{(i,j) \in [\![1,d]\!] \times [\![1,p]\!]}$$

et M est de rang p. Il existe donc $1 \leq i_1 < ... < i_p \leq d$ tels que

$$(e_{i_k}^*(v_j))_{1 \leq k,j \leq p} \in \mathcal{G}\ell_p(\mathbb{R})$$

Considérant alors

$$\mu : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{V}^p & \to & \mathbb{R} \\ (w_1, ..., w_p) & \mapsto & \det(e^*_{i_k}(v_j))_{1\leq k,j\leq p} \end{array} \right.$$

qui est continue car polynomiale en les coefficients dans la base $\mathcal{B}$, eux-mêmes continus, on constate que $(v_1, ..., v_p) \in \mu^{-1}(\mathbb{R}^*) \subset \mathrm{U}$ et comme $\mu^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert, U est un ouvert de V^p. Le lemme est prouvé.

Considérons à présent

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\mathrm{E}) & \to & \mathcal{L}(\mathrm{E}) \\ u & \mapsto & (id, u, ..., u^{n-1}) \end{array} \right.$$

qui est linéaire donc continue. $\Omega = \Phi_{-1}(\mathrm{U})$ où U défini dans le lemme appliqué à $\mathrm{V} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$. □

Exercice 35.5 (Commutant). Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des polynômes en f et $\Gamma(f)$ le commutant de f :

$$\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid g \circ f = f \circ g\}$$

$\mathbb{K}[f]$ et $\gamma(f)$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ (s.e.v qui sont stables par $\circ$ et contiennent l'identité). On suppose que f est diagonalisable, et on note respectivement μ_f et χ_f ses polynômes minimal et caractéristique.

$$\mu_f = (\mathrm{X} - \lambda_1)...(\mathrm{X} - \lambda_s) \qquad \chi_f = (\mathrm{X} - \lambda_1)^{\omega_1}...(\mathrm{X} - \lambda_s)^{\omega_s}$$

avec les λ_i deux à deux distincts et $\omega_i \geq 1$ pour tout $1 \leq i \leq s$.
Montrer

$$\dim \mathbb{K}[f] = s \qquad \text{et} \qquad \dim \Gamma(f) = \sum_{i=1}^{s} \omega_i^2$$

Solution. $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(f^k \mid k \in \mathbb{N}) = \sum_{k=0}^{\deg \mu_f} \mathbb{K} f^k$ d'où le premier résultat : les valeurs propres de f sont les racines de μ_f, qui est un polynôme scindé à racines simples puisque f est diagonalisable, donc $\deg \mu_f = s$ et $\boxed{\dim \mathbb{K}[f] = s}$.

Montrons à présent que

$$\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid \forall i \in \{1, ..., s\} \ , g(\mathrm{E}_{\lambda_i,f}) \subset \mathrm{E}_{\lambda_i,f}\}$$

L'inclusion de gauche est évidente lorsqu'on a l'habitude de travailler avec des endomorphismes qui commutent. Soit donc $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $\forall i \in \{1, ..., s\}\, g(\mathrm{E}_{\lambda_i,f}) \subset \mathrm{E}_{\lambda_i,f}$. Puisque f est diagonalisable,

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{E}_{\lambda_i,f}$$

Soit $x \in \mathrm{E}$ et soit $(u_1, ..., u_s) \in \mathrm{E}_{\lambda_1,f} \times ... \times \mathrm{E}_{\lambda_s,f}$ tel que $x = u_1 + ... + u_s$. Alors

$$g \circ f(x) = g(\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_s u_s) = \lambda_1 g(u_1) + ... + \lambda_s g(u_s) = f(g(u_1)) + ... + f(g(u_s)) = f \circ g(x)$$

donc $g \in \Gamma(f)$.

Considérons à présent

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma(f) & \to & \prod_{i=1}^{s} \mathcal{L}(\mathrm{E}_{\lambda_i,f}) \\ g & \mapsto & (g_{|\mathrm{E}_{\lambda_1,f}}, ..., g_{|\mathrm{E}_{\lambda_s,f}}) \end{array} \right.$$

qui est bien définie d'après ce qui précède, et qui n'est rien d'autre qu'un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc $\boxed{\dim \Gamma(f) = \sum_{i=1}^{s} \dim \mathcal{L}(\mathrm{E}_{\lambda_i,f}) = \sum_{i=1}^{s} \omega_i^2.}$

□

Exercice 35.6 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ trigonalisable. Montrer qu'il existe un unique couple $(d, \nu) \in (\mathcal{L}(\mathrm{E}))^2$ tel que

(i) $f = d + \nu$

(ii) d diagonalisable

(iii) ν nilpotent

(iv) $d \circ \nu = \nu \circ d$

Solution. Montrons l'existence d'une telle décomposition. On note $(\lambda_1, ..., \lambda_s)$ les valeurs propres de f et $\mathrm{F}_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_\mathrm{E})^{\omega_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i. On note Π_i le projecteur spectral associé à λ_i, c'est à dire le projecteur sur F_i parallèlement à $\underset{j \neq i}{\oplus} \mathrm{F}_j$. On pose finalement

$$d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \Pi_i \qquad \nu = f - d$$

(i) $f = d + \nu$

(ii) d est diagonalisable : il suffit de prendre β_i une base de F_i, pour tout $1 \leq i \leq s$ et en faire une base $\beta = (\beta_1, ..., \beta_s)$ qui est une base de vecteurs propres de d ;

(iii) ν est nilpotent : notons $\mathrm{N} = \max(\omega_1, ..., \omega_s)$ et donnons-nous $x \in \mathrm{E}$, que l'on écrit $x = x_1 + ... + x_s$ avec $x_i \in \mathrm{F}_i$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Alors,

$$\nu^\mathrm{N}(x) = (f - d)^\mathrm{N}(x) = (f - d)^\mathrm{N}(\sum_{i=1}^{s} x_i) = \sum_{i=1}^{s} (f - d)^\mathrm{N}(x_i) = 0$$

(iv) ν et d commutent :

$$d \circ \nu = \left(\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} \lambda_i \mathrm{id}_{\mathrm{F}_i} \right) \circ \left(\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} \nu_i \right) = \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} \lambda_i \mathrm{id}_{\mathrm{F}_i} \circ \nu_i = \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} \nu_i \circ \lambda_i \mathrm{id}_{\mathrm{F}_i} = \nu \circ d$$

Montrons à présent qu'une telle décomposition est unique. Soient (d, ν) et (d', ν) vérifiant toutes les conditions.

$$d' \circ \nu' = \nu' \circ d'$$
$$d' \circ (d' - f) = (d' - f) \circ d'$$
$$d' \circ f = f \circ d'$$

donc d' commute avec tout polynôme en f. Or on a le

Lemme 35.6.1. *Pour tout* $1 \leq i \leq s$, $\Pi_i \in \mathbb{K}[f]$ *Preuve.* On pose $\mathrm{R}_i = \prod_{j \neq i} (\mathrm{X} - \lambda_j)^{\omega_j}$ pour $1 \leq i \leq s$. Les R_i sont premiers entre eux dans leur ensemble. Soient $\mathrm{B}_1, ..., \mathrm{B}_s \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{B}_1\mathrm{R}_1 + ... + \mathrm{B}_s\mathrm{R}_s = 1$. On pose pour $1 \leq i \leq s$

$$\tilde{\Pi}_i = \mathrm{R}_i(f) \circ \mathrm{B}_i(f)$$

et on montre que pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $i \in [\![1,]\!]$, $\tilde{\Pi}_i(x) \in \mathrm{F}_{\lambda_i}$ et $x = \sum_{i=1}^{s} \tilde{\Pi}_i(x)$. Donc $\tilde{\mathrm{P}}i_i = \Pi_i$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Le lemme est prouvé.

Donc d' commute avec d. De même, ν' commute avec f, donc avec d également, et donc aussi avec $f - d = \nu$.

$$d - d' = \nu' - \nu$$

d et d' commutent donc sont codiagonalisables et donc $d - d'$ est diagonalisable. Comme ν et ν' commutent, $\nu' - \nu$ est nilpotent : en notant r' et r les indices de nilpotence respectifs,

$$(\nu' - \nu)^{r+r'-1} = \sum_{k=0}^{r'-1} \binom{r+r'-1}{k} \underbrace{\nu'^{r+r'-1-k}}_{0} (-1)^k \nu^k + \sum_{k=r}^{r'+r-1} \binom{r+r'-1}{k} \nu'^{r+r'-1-k} (-1)^k \underbrace{\nu^k}_{0}$$

$d - d'$ a donc 0 comme unique valeur propre tout en étant diagonalisable, donc est nul. D'où $d = d'$ et $\nu = \nu'$. □

Exercice 35.7 (Lyon)**.** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $\forall k \in \mathrm{N}\ \operatorname{tr} \mathrm{A}^k = \operatorname{tr} \mathrm{B}^k$.

Solution. Montrons que la condition est que A et B aient même polynôme caractéristique.

CONDITION SUFFISANTE. Supposons que $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}} = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_i)$. La trigonalisation fournit pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{tr} \mathrm{A}^k = \operatorname{tr} \mathrm{B}^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k$$

CONDITION NÉCESSAIRE. Considérons les complexes $\lambda_1, ..., \lambda_r$ deux à deux distincts tels que $Sp(\mathrm{A}) \cup Sp(\mathrm{B})$. On note m_i (n_i) la multiplicité de λ_i pour A (pour B). L'hypothèse fournit : pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{r} (m_i - n_i) \lambda_i^k = 0$$

mais la matrice de Vandremonde $(\lambda_i^{j-1})_{1 \le i,j \le r}$ est inversible, donc pour tout $1 \le i \le r$ on a $m_i = n_i$, et donc $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{B}}$. □

Exercice 35.8. [a] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ admettant un polynôme minimal Π_f.

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on note P_x le polynôme unitaire de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de plus bas degré tel que $\mathrm{P}_x(f)(x) = 0$ (polynôme minimal de x relatif à f).

1. **a)** Montrer que P_x existe et est unique, et que si $\mathrm{P}(f)(x) = 0$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, alors $\mathrm{P}_x | \mathrm{P}$.
   b) Montrer que $\mathrm{E}_x = \{\mathrm{P}(f)(x) \mid \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$ est un s.e.v de dimension $\deg(\mathrm{P}_x)$.
2. **a)** Si $\mathrm{E}_x \cap \mathrm{E}_y = \{0\}$, montrer que $\mathrm{P}_{x+y} = \mathrm{P}_x \vee \mathrm{P}_y$. Généraliser à p vecteurs $x_1, ..., x_p$.
   b) Si P_x et P_y sont premiers entre eux, montrer $\mathrm{E}_{x+y} = \mathrm{E}_x \oplus \mathrm{E}_y$. Généraliser à p vecteurs $x_1, ..., x_p$.
3. **a)** Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un facteur irréductible de Π_f, α sa multiplicité dans la décomposition de Π_f en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe $x \in \ker \mathrm{M}^\alpha(f)$ tel que $\mathrm{P}_x = \mathrm{M}^\alpha$.
   b) Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{P}_x = \Pi_f$.

[a] Xavier Gourdon, *Les maths en tête*, tome d'Algèbre, seconde édition, page 178.

Solution. **1. a)** L'ensemble des polynômes annulateurs de x relativement à f est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ non réduit à $\{0\}$, car il contient Π_f. Il existe donc un unique polynôme unitaire le générant, noté P_x, et il est de plus bas degré. Si $\mathrm{P}(f)(x) = 0$, $\mathrm{P}_x | \mathrm{P}$.

b)

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \to & \mathrm{E}_x \\ \mathrm{P} & \mapsto & \mathrm{P}(f)(x) \end{array} \right.$$

est du genre à être surjective. E_x est donc isomorphe à $\mathbb{K}[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_x\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, de dimension $\deg \mathrm{P}_x$.

2. **a)** Comme $\mathrm{P}_{x+y}(f)(x+y) = 0$, on a par linéarité $\mathrm{P}_{x+y}(f)(x) = -\mathrm{P}_{x+y}(f)(y)$. Mais $\mathrm{E}_x \cap \mathrm{E}_y = \{0\}$, donc $\mathrm{P}_{x+y}(f)(x) = \mathrm{P}_{x+y}(f)(y) = 0$. Par conséquent, P_x et P_y divisent P_{x+y}, donc $(\mathrm{P}_x \vee \mathrm{P}_y)|\mathrm{P}_{x+y}$.

$$\boxed{\mathrm{E}_x \cap \mathrm{E}_y = \{0\} \Rightarrow \mathrm{P}_{x+y} = \mathrm{P}_x \vee \mathrm{P}_y}$$

On généralise le résultat par récurrence sur p.

b) Soit $x \in \mathrm{E}_x \cap \mathrm{E}_y$. Il existe $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $z = \mathrm{P}(f)(x) = \mathrm{Q}(f)(y)$. Or

$$0 = \mathrm{P}(f) \circ \mathrm{P}_x(f)(x) = \mathrm{P}_x(f)(z) = (\mathrm{P}_x\mathrm{Q})(f)(y)$$

donc $\mathrm{P}_y|\mathrm{P}_x\mathrm{Q}$ mais $\mathrm{P}_x \wedge \mathrm{P}_y = 1$ donc $\mathrm{P}_y|\mathrm{Q}$ d'où $z = \mathrm{Q}(y) = 0$. Ainsi $\mathrm{E}_x \cap \mathrm{E}_y = \{0\}$. Or, puisque $\mathrm{P}_{x+y} = \mathrm{P}_x \vee \mathrm{P}_y = \mathrm{P}_x\mathrm{P}_y$,

$$\dim \mathrm{E}_{x+y} = \deg \mathrm{P}_{x+y} = \deg \mathrm{P}_x + \deg \mathrm{P}_y = \dim \mathrm{E}_x + \dim \mathrm{E}_y$$

et de plus $\mathrm{E}_{x+y} \subset \mathrm{E}_x + \mathrm{E}_y$ puisque $\mathrm{P}(f)(x+y) = \mathrm{P}(f)(x) + \mathrm{P}(f)(y)$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{P}_x \wedge \mathrm{P}_y = 1 \Rightarrow \mathrm{E}_{x+y} = \mathrm{E}_x \oplus \mathrm{E}_y}$$

3. **a)** On écrit

$$\Pi_f = \mathrm{M}^\alpha \mathrm{N}$$

avec $\mathrm{N} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ premier avec M. Le lemme des noyaux fournit

$$\mathrm{E} = \ker \mathrm{M}^\alpha(f) \oplus \ker \mathrm{N}(f)$$

Pour tout $x \in \ker \mathrm{M}^\alpha(f)$, $\mathrm{P}_x|\mathrm{M}^\alpha$ et comme M est irréductible, il existe $\beta_x \leq \alpha$ tel que $\mathrm{P}_x = \mathrm{M}^{\beta_x}$. Il s'agit donc de montrer qu'il existe un $x \in \ker \mathrm{M}^\alpha(f)$ tel que $\beta_x = \alpha$. On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Par conséquent, $\ker \mathrm{M}^\alpha(f) = \ker \mathrm{M}^{\alpha-1}(f)$ et donc $\mathrm{E} = \ker \mathrm{N}\mathrm{M}^{\alpha-1}(f)$ ce qui contredit la minimalité de Π_f.

Donc $\boxed{\text{il existe } x \in \ker \mathrm{M}^\alpha(f) \text{ tel que } \mathrm{P}_x = \mathrm{M}^\alpha.}$

b) Soit

$$\Pi_f = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{M}_i^{\alpha_i}$$

la décomposition de Π_f en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. La question précédente fournit pour tout $1 \leq i \leq k$ l'existence de $x \in \ker \mathrm{M}^{\alpha_i}$ tel que $\mathrm{P}_x = \mathrm{M}_i^{\alpha_i}$. Mais on a également

$$\mathrm{E}_{x_1+\ldots+x_k} = \mathrm{E}_{x_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}_{x_k}$$

d'où

$$\mathrm{P}_{x_1+\ldots+x_k} = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{x_i} = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{M}_i^{\alpha_i} = \Pi_f$$

$$\boxed{\exists x \in \mathrm{E} \quad \mathrm{P}_x = \Pi_f}$$

□

Exercice 35.9. **1.** Soit A une matrice diagonale à coefficients deux à deux distincts, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ où K corps quelconque. Montrer

$$\Gamma(\mathrm{A}) = \mathrm{K}[\mathrm{A}] = \mathcal{D}_n(\mathrm{K})$$

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{K})$ dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes. Montrer que l'on a encore $\Gamma(\mathrm{A}) = \mathrm{K}[\mathrm{A}] = \mathcal{D}_n(\mathrm{K})$.

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Déduire de ce qui précède que A est triangulaire supérieure.

4. Prouver le résultat précédent sans utiliser les deux premières questions.

<u>*Solution.*</u> **1.** On a déjà les inclusions suivantes :

$$\mathcal{D}_n(\mathrm{K}) \subset \Gamma(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{K}[\mathrm{A}] \subset \Gamma(\mathrm{A})$$

et par ailleurs, $\dim \mathrm{K}[\mathrm{A}] = \deg \mu_{\mathrm{A}} = n$. Soit $\mathrm{M} \in \Gamma(\mathrm{A})$. Soient $i, j \in \{1, ..., n\}$. $(\mathrm{AM})_{ij} = (\mathrm{MA})_{ij}$ donne $a_i \mathrm{M}_{ij} = \mathrm{M}_{ij} a_j$ et donc $\mathrm{M}_{ij} = 0$ sauf si $i = j$. Donc $\mathrm{M} \in \mathcal{D}_n(\mathrm{K})$. Ainsi $\Gamma(\mathrm{A}) = \mathcal{D}_n(\mathrm{K})$. Or $\dim \mathcal{D}_n(\mathrm{K}) = n$ et $\mathrm{K}[\mathrm{A}] \subset \Gamma(\mathrm{A})$ ce qui finalement fournit $\Gamma(\mathrm{A}) = \mathrm{K}[\mathrm{A}]$.

2. Clair en diagonalisant la matrice.

3. A commute avec A^2, donc A est un polynôme en A^2, donc est triangulaire supérieure.

4. A^2 annule $\mu_{\mathrm{A}^2} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - k)$, donc A annule $\mu_{\mathrm{A}^2}(\mathrm{X}^2)$ qui est scindé à racines simples, Par conséquentA est diagonalisable, avec $Sp(\mathrm{A}) \subset \{1, \sqrt{2}, ..., \sqrt{n}, -1, -\sqrt{2}, ..., -\sqrt{n}\}$, et par ailleurs on vérifie que si λ est valeur propre de A, $-\lambda$ ne l'est pas, puisque les sous-espaces propres de A^2 sont des droites.

Soient $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ et $\mathrm{P} \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$ tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n\sqrt{n} \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}$$

ce qui fournit

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}$$

Observons P : cette matrice est constituée de vecteurs propres $\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n$ relatifs aux valeurs propres $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\sqrt{n}$ de A, mais aussi aux valeurs propres $1, ..., n$ de A^2. En écrivant le système $\mathrm{A}^2\mathrm{X}_k = k\mathrm{X}_k$ pour $1 \leq k \leq n-1$, on constate aisément que les $n-k$ dernières composantes de X_k sont nulles. Ainsi P est triangulaire supérieure, et donc A également, puisque $(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}), +, \times)$ est un anneau.

□

Exercice 35.10. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Solution. On va d'abord montrer que A et B ont un vecteur propre commun, puis procéder par récurrence sur leur taille. Première méthode. On discute, selon que B est nilpotente ou non. Dans le premier cas, si l'on note p l'indice de nilpotence de B, un X tel que $B^{p-1}X \neq 0$ convient. Seconde méthode. On remarque que $\operatorname{Im} B \subset \ker A$. □

Exercice 35.11. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = C$, $AC = CA$, $BC = CB$. Montrer que A, B et C sont cotrigonalisables.

Solution.

Si $C = 0$, alors A, B et C sont cotrigonalisables puisqu'alors A, B et C commutent (cf chapitre réduction). On formule l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$: Pour tout E $\mathbb{C}$-e.v de dimension n, si $A, B, C \in \mathcal{L}(E)$ avec $A \circ B - B \circ A = C$, $A \circ C = C \circ A$ et $B \circ C = C \circ B$, alors il existe une base de E qui trigonalise simultanément A, B et C.

$\mathcal{H}_1$ est vraie. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_{n-1}$ soient vraies. Soient E, A, B et C comme dans l'hypothèse de récurrence. Notons $F_1, ..., F_p$ les ous-espaces caractéristiques de C. Chaque F_i est stable par A, B et C, et

$$\oplus F_i = E$$

- Si $p \geq 2$, alors $\dim F_i < n$ et on applique l'hypothèse de récurrence sur chaque induit de A, B et C ; les bases obtenues forment une base de E, et $\mathcal{H}_n$ est prouvée ;
- si $p = 1$, C possède une seule valeur propre λ et

  $$n\lambda = \operatorname{tr} C = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$$

  Donc $\lambda = 0$ On a déjà traité le cas où $C = 0$. Si $C \neq 0$, on se donne G un supplémentaire quelconque de $\ker C$ dans E. $\ker C$ est stable par A, B et C. Soit $\mathcal{B}_{\ker C}$ une base de $\ker C$ qui cotrigonalise les induits de A, B et C sur $\ker C$, que l'on complète à l'aide d'une base de G en une base de E, notée $\mathcal{B}$. On a alors

  $$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{\ker F} & * \\ 0 & A_G \end{pmatrix} \qquad [B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B_{\ker F} & * \\ 0 & B_G \end{pmatrix} \qquad [C]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & C_G \end{pmatrix}$$

  A_G, B_G et C_G vérifient les hypothèses de récurrence, donc sont cotrigonalisables.

La récurrence se propage et le résultat est prouvé. □

Exercice 35.12. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Établir l'équivalence suivante :

$$B \text{ nilpotente et } BA = 0 \iff \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$$

Exercice 35.13. Soit E un $\mathbb{C}$-e.v de dimension finie d et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si pour tout $x \in E$ $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E.
2. Montrer que $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
3. Montrer que $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $Sp(f) \subset B_o(0, 1)$.

Solution. **1.** Soit $(e_1, ..., e_d)$ une base de E. On définit une norme ν sur E par $\nu(\sum_{i=1}^d x_i e_i) = \max\limits_{1\leq i\leq d} |x_i|$.

2.

3.

$\square$

Chapitre 36

Exponentielle de matrice, exponentielle d'endomorphisme

Exercice 36.1. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\left(\mathrm{I}_n + \frac{\mathrm{A}}{p}\right)^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \exp(\mathrm{A})$.

Exercice 36.2. Soit V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant I_n. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i) $\mathrm{I}_n \in \mathrm{V}$ et V est stable par $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^2$

(ii) V est stable par exp

Exercice 36.3. Trouver les périodes de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 36.4. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère le système différentiel

$$(\mathrm{S})\ :\ \mathrm{X}' = \mathrm{AX}$$

où l'inconnue $\mathrm{X} : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{C}^n$ est dérivable. À quelle condition sur A a-t-on :

(i) les solutions de (S) sont bornées ;

(ii) les solutions de (S) ont une limite en $+\infty$;

(iii) les solutions de (S) ont 0 pour limite en $+\infty$.

Traiter le cas $n = 2$ puis le cas général.

Exercice 36.5. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}), \times)$ un morphisme continu de groupes.
Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \exp(t\mathrm{A})$$

Solution. Montrons que f est solution d'un système différentiel à coefficients constants et résolvons ce système.

Montrons pour commencer que f est dérivable. Considérons

$$\mathrm{F} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u \end{cases}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$, puisque f est continu. Soient $x, h \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{F}(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f(u)\mathrm{d}u = \int_0^h f(x+\tau)\mathrm{d}\tau = f(x)\int_0^h f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Ainsi pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) = f(x)\mathrm{F}(h)$$

Lemme 36.5.1. *Il existe $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $\mathrm{F}(h) \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.*

Preuve. $\mathrm{F}(0) = 0$, or F est dérivable en 0 et $\mathrm{F}'(0) = f(0) = \mathrm{I}_n$ donc il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et nulle en 0 telle que

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}(h) &= \mathrm{F}(0) + h\mathrm{F}'(0) + h\varepsilon(h) \\ \mathrm{F}(h) &= h(\mathrm{I}_n + \varepsilon(h)) \end{aligned}$$

On constate que ε est, par définition, également continue en tout $h \neq 0$. De plus, $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc

$$\mathrm{X} = \{h \in \mathbb{R} \mid \mathrm{I}_n + \varepsilon(h) \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, donc $\mathrm{X} \neq \{0\}$ et le lemme est prouvé.

Soit $b \in \mathrm{X} \setminus \{0\}$. Il est licite d'écrire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (\mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x)) \times (\mathrm{F}(b))^{-1}$$

et donc $\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$.

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Lorsque $h \underset{\neq}{\to} 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - \mathrm{I}_n}{h}$$

d'où

$$f'(x) = f(x) \times f'(0)$$

et on pose $\mathrm{A} = f'(0)$.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}\ f'(x) = f(x) \times \mathrm{A}}$$

L'application

$$\Lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \mapsto & \mathrm{MA} \end{array} \right.$$

est linéaire, et f est solution du système

$$\mathrm{X}'(t) = \Lambda(\mathrm{X}(t))$$

qui possède une unique solution, donc

$$f(t) = \exp(t\mathrm{A})$$

ou sinon on peut le voir comme

$$f(t) = (\exp(t\Lambda))(f(0)) = (\exp(t\Lambda))\mathrm{I}_n$$

et calculer $\exp(t\Lambda)$: c'est simple, puisque $\Lambda^p : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{MA}^p$ pour tout $p \geq 0$ et donc par linéarité et passage à la limite, $\exp(\Lambda) : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}\exp\mathrm{A}$ ce qui fournit bien la même solution. $\square$

Exercice 36.6. Calculer le déterminant de $\exp \mathrm{M}$ pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution. M est trigonalisable. On dispose donc de P inversible et de T triangulaire supérieure telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PTP}^{-1}$. Alors

$$\det\exp(\mathrm{M}) = \det\exp(\mathrm{PTP}^{-1}) = \det \mathrm{P}\exp(\mathrm{T})\mathrm{P}^{-1} = \det\exp \mathrm{T} = \boxed{e^{\operatorname{tr}\mathrm{M}}}$$

□

Exercice 36.7. Soit M une matrice réelle. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si pour tout réel t, $e^{t\mathrm{M}}$ est orthogonale.

Exercice 36.8. Montrer

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$$

Solution. Une des deux inclusions est évidente. Il va s'agir de démontrer l'autre.

Lemme 36.8.1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. E *un* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f = id + \nu$ *où* ν *nilpotente.*

Alors il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\exp(g) = f$.

Preuve. On pose en s'inspirant du cas réel :

$$\mathrm{L}_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}\mathrm{X}^k}{k} \qquad \mathrm{Q}_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}$$

et la théorie des développements limités nous fournit

$$\mathrm{Q}_n(\mathrm{L}_n(\mathrm{X})) = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^n\mathrm{R}_n(\mathrm{X})$$

Pour n assez grand,

$$\mathrm{Q}_n(\mathrm{L}_n(\nu)) = id + \nu + \nu^n\mathrm{R}_n(\nu) = id + \nu = f$$

et si

$$g := \mathrm{L}_n(\nu) = \nu\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}\nu^{k-1}}{k}$$

pour n assez grand $g^n = 0$. Finalement pour n assez grand

$$f = \mathrm{Q}_n(\mathrm{L}_n(\nu)) = \mathrm{Q}_n(g) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k}{k!} = \exp(g)$$

et le lemme est prouvé.

Lemme 36.8.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. E *un* $\mathbb{K}$*-e.v de dimension finie,* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et* $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f = \lambda id + \nu$ *où* ν *nilpotente.*

Alors il existe $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $\exp(g) = f$.

Preuve. $f = \lambda id \circ (id + \frac{1}{\lambda}\nu)$. Soient $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $e^\mu = \lambda$ et $\gamma \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $id + \frac{1}{\lambda}\nu = \exp(\gamma)$. On a $f = \exp(\mu id + \gamma)$.

Lemme 36.8.3. E *un* $\mathbb{C}$*-e.v de dimension finie égale à* n. *Pour* $f \in \mathcal{G}\ell(\mathrm{E})$ *il existe* $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $f = \exp(g)$.

Preuve. $f = \oplus f_i$ où f_i l'induit de f sur le $i^{\text{ème}}$ sous-espace caractéristique de f noté F_i associé à λ_i. $f_i = \lambda_i id_{\mathrm{F}_i} + \nu_i = \exp(g_i)$ d'après le lemme précédent. Alors $f = \oplus\exp(g_i) = \exp(\oplus g_i)$.

$$\boxed{\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})}$$

□

Chapitre 37

Espaces euclidiens, endomorphismes orthogonaux

Exercice 37.1 (Inégalité d'Hadamard)**.** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$(\det \mathrm{A})^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{ij}^2 \right).$$

Solution. Si A n'est pas inversible, c'est évident. Si A est inversible, utiliser l'orthogonalisée de Schmidt de la base associée. On ne change pas le déterminant en retranchant des combinaisons linéaires des autres colonnes. Par ailleurs, un projecteur ne peut que diminuer la norme euclidienne. □

Exercice 37.2. Soit E un espace euclidien et $\pi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un projecteur. Montrer

$$\pi \text{ projecteur orthogonal } \iff |||\pi||| \leq 1$$

Solution. Condition nécessaire. Soit $x \in \mathrm{E}$. En élevant au carré,

$$\|x\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2 \geq \|\pi x\|^2$$

donc $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Ainsi $\boxed{|||\pi||| \leq 1.}$

Condition suffisante. Notons $\mathrm{F} = \Im\pi$ et $\mathrm{G} = \ker \pi$. $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. Soient $x \in \mathrm{F}$ et $y \in \mathrm{G}$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\lambda x\|^2 \leq \|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 + 2\lambda\mu \langle x|y\rangle$$

ce qui donne

$$0 \leq 2\lambda\mu \langle x|y\rangle + \mu^2\|y\|^2$$

ceci étant vraiment notamment pour tout $\mu > 0$, en divisant par $\mu > 0$ il vient

$$\mu\|y\|^2 + 2\lambda \langle x|y\rangle \geq 0$$

et on obtient en faisant tendre μ vers 0 :

$$2\lambda \langle x|y\rangle \geq 0$$

donc $\langle x|y\rangle \geq 0$ si $\lambda > 0$, mais obtient aussi $\langle x|y\rangle \leq 0$ pour $\lambda < 0$ donc finalement $\langle x|y\rangle = 0$.

Ainsi $\boxed{\pi \text{ est un projecteur orthogonal.}}$ □

Exercice 37.3. Montrer que $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ est un compact de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Solution.
— $\mathcal{O}$ est borné : puisque $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ conserve la norme, $|||f||| = 1$.
— $\mathcal{O}$ est fermé : le problème scalaire est continu car bi-linéaire (argument suffisant en dimension finie) et polynomiale en les coordonnées dans une base orthonormale.

$$\mathcal{O}(\mathrm{E}) = \bigcap_{(x,y)\in\mathrm{E}^2} \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle\}$$

Donc $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ est un fermé borné de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, e.v.n de dimension finie, donc $\boxed{\mathcal{O}(\mathrm{E}) \text{ est compact.}}$

Remarque 37.3.1. On peut autrement utiliser la caractérisation de conservation de la norme pour le caractère fermé.

□

Exercice 37.4. Soit E un espace euclidien.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \forall\, x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\| = \|x\|.$$

2. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$. Montrer

$$f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \iff \forall\, (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E},\ \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle\,.$$

Solution. **1.** Cela découle directement de l'identité de polarisation.

2. Condition nécessaire. C'est clair.

Condition suffisante. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E. On constate que $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est un système orthonormal, donc une base orthonormale. Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ et $f(x) = y_1f(e_1) + ... + y_nf(e_n)$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$y_i = \langle f(x)|f(e_i)\rangle = \langle x|e_i\rangle = x_i$$

Soit $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ telle que $\forall i \in \{1, ..., n\},\ \varphi(e_i) = f(e_i)$. Alors on constate que $f = \varphi$, donc f est linéaire et c'est un endomorphisme orthogonal. $\boxed{f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}).}$

□

Exercice 37.5. Montrer que les diagonalisables de $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ sont les symétries orthogonales.

Solution. Une symétrie orthogonale est diagonalisable, d'après le théorème général à ce sujet.

Soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ diagonalisable. Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé.

$$\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda l\|x\|$$

d'où $\lambda \in \{-1, 1\}$. Par conséquent,

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(u) \oplus \mathrm{E}_{-1}(u)$$

Montrons que $\mathrm{E}_1(u) \setminus \mathrm{E}_{-1}(u)^\perp$. Soient $x \in \mathrm{E}_1(u)$ et $y \in \mathrm{E}_{-1}(u)$. Par conséquent,

$$\|x - y\| = \|x + y\|$$

ce qui fournit en élevant au carré et en simplifiant

$$-2\langle x|y\rangle = 2\langle x|y\rangle$$

de là $x \perp y$. Finalement

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{E}_{-1}(u)$$

et u est une symétrie orthogonale sur $\mathrm{E}_1(u)$ par rapport à $\mathrm{E}_{-1}(u)$. □

Exercice 37.6. Soit E un espace euclidien orienté.
Montrer que $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ est engendré par les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans.

Solution. Le cas de la dimension 1 est trivial : $\mathcal{O}(\mathrm{E}) = \{id, -id\}$ symétries par rapport à $\{0\}$. Il en va de même de la dimension 2 :

$$\mathcal{O}(\mathrm{E}) = \{s_{\mathrm{D}} \mid \mathrm{D} \text{ droite}\} \cup \underbrace{\{s_{\mathrm{D}} \circ s_{\mathrm{D}'} \mid \mathrm{D} \text{ et } \mathrm{D}' \text{ droites}\}}_{\rho_{2(\mathrm{D},\mathrm{D}')}}$$

Soit $n \geq 3$. Soit f une isométrie orthogonale d'un espace euclidien orienté E de dimension n et $\mathcal{B}$ une b.o.n de E telle que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & & & & \\ & -\mathrm{I}_q & & & \\ & & \mathrm{R}_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathrm{R}_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$f = s_1 \circ \ldots \circ s_q \circ r_1 \circ \ldots \circ r_s$$

où

$$[s_i]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$[r_i]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & & & & \\ & \mathrm{I}_q & & & \\ & & \mathrm{I} & & \\ & & & \mathrm{R}_{\theta_i} & \\ & & & & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

On a ainsi

$$r_i = id_{\mathrm{F}_i} \overset{\perp}{\oplus} \rho_i$$

où F_i est un s.e.v de dimension $n-2$ et ρ_i une rotation dans un plan P, qui peut s'écrire comme une composée de deux symétries par rapport à deux droites D et D′ de P, c'est-à-dire $\rho = s_{\mathrm{D}'} \circ s_{\mathrm{D}}$, de sorte que

$$r_i = s_{\mathrm{F}+\mathrm{D}',(\mathrm{F}+\mathrm{D}')^{\perp}} \circ s_{\mathrm{F}+\mathrm{D},(\mathrm{F}+\mathrm{D})^{\perp}}$$

composée de deux symétries par rapport à deux hyperplans de E.

Finalement f est produit de $t = q + 2s = n - p$ symétries par rapport à des hyperplans. Il est par ailleurs clair que le sous-groupe généré par les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan est dans $\mathcal{O}(\mathrm{E})$. □

Exercice 37.7. Soit E un e.v.e et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ telle que $|||u||| \leq 1$. Montrer que

$$\mathrm{E} = \ker(u - id_{\mathrm{E}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}}).$$

Solution. Soient $x \in \ker(u - id_{\mathrm{E}})$ et $y \in \mathrm{E}$. On a :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \|u(\lambda x + \mu y)\|^2 \leq \|\lambda x + \mu y\|^2$$

ce qui donne en développant et réarrangeant les termes :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \mu^2\|u(y)\|^2 - \mu\|y\|^2 \leq 2\mu\lambda \langle x|y - u(y)\rangle$$

et donc en faisant $\mu = 1$:

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \|u(y)\|^2 - \|y\|^2 \leq 2\lambda \langle x|y - u(y)\rangle$$

De là,

— si $\langle x|y - u(y)\rangle > 0$, contradiction en faisant $\lambda \to -\infty$;

— si $\langle x|y - u(y)\rangle < 0$, contradiction en faisant $\lambda \to +\infty$.

Donc $\langle x|y - u(y)\rangle = 0$. Ainsi $\ker(u - id_{\mathrm{E}}) \subset \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}})^{\perp}$. Or le théorème du rang fournit $\dim\ker(u - id_{\mathrm{E}}) = \dim\mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}})^{\perp}$. Donc finalement il y a égalité des deux ensembles.

$$\boxed{\mathrm{E} = \ker(u - id_{\mathrm{E}}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - id_{\mathrm{E}})}$$

□

Exercice 37.8. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Solution. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|$ définie pour tout A par

$$\|\mathrm{A}\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} |\mathrm{A}_{ij}|.$$

L'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \mapsto & {}^t\mathrm{MM} \end{array} \right.$$

est continue car polynomiale en les coefficients des matrices. Or $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{\mathrm{I}_n\})$ donc $\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé.}}$

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $1 \leq i \leq n$.

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{ik}({}^t\mathrm{A})_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{ik}^2$$

donc $|\mathrm{A}_{ik}| \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Par conséquent, $\|\mathrm{A}\| \leq 1$ et $\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est borné.}}$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est un compact de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$ □

Exercice 37.9. Soit $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ un e.v.e de dimension n.

1. Déterminer
$$\{u \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \mid \operatorname{tr} u = n\}$$

2. Soit $u \in \mathcal{O}^-(\mathrm{E})$. Montrer que $\operatorname{tr} u \leq n-2$. Cas d'égalité ?

Solution. **1.** Soit $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ de trace n. On se donne $(e_1, ..., e_n)$ une b.o.n de E.

$$n = \operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | u(e_i)\rangle \leq \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|\|u(e_i)\| = n$$

donc toutes les inégalités sont des égalités, et notamment $\langle e_i | u(e_i)\rangle = \|e_i\|\|u(e_i)\|$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc $u(e_i)$ positivement lié à e_i, et comme u conserve les normes, $u(e_i) = e_i$. Finalement $\boxed{u = id_{\mathrm{E}}.}$ On pouvait également le montrer matriciellement en s'inspirant de la preuve de la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

2. On se donne $\mathcal{B}$ une b.o.n telle que

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & & & & \\ & -\mathrm{I}_q & & & \\ & & \mathrm{R}_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathrm{R}_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

avec $\theta_i \in]0, \pi[$ pour tout $1 \leq i \leq s$. Du déterminant de u, on tire q impair supérieur ou égal à 1. Par ailleurs, on a $n = p + q + 2s$. De là,

$$\operatorname{tr} u \leq p - q + 2s = n - 2q \leq n - 2$$

Le cas d'égalité fournit $q = 1$ et $p + 2s = p + 2\sum_{i=1} s \cos\theta_i$ donc $s = 0$ et $p = n-1$. Donc u est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. La réciproque est immédiate.

□

Exercice 37.10. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Montrer

$$\mathrm{M} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a,\ b \text{ et } c \text{ racines d'un polynôme } \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + k \text{ avec } 0 \leq k \leq \frac{4}{27}$$

Solution. Condition nécessaire. On suppose que $\mathrm{M} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. De là, on tire :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 & (1) \\ ab + bc + ca = 0 & (2) \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 & (3) \end{cases}$$

Par ailleurs, posons $k - abc$ et considérons le polynôme

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_k &= (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)(\mathrm{X}-c)\\ &= \mathrm{X}^3 - (a+b+c)\mathrm{X}^2 + (ab+bc+ca)\mathrm{X} - abc\end{aligned}$$

On va tenter d'exprimer (1) et (2) en fonctions des sommes symétriques. De (1) et (2) on tire :

$$1 = a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2\underbrace{(ab+bc+ca)}_{=0}$$

donc $a+b+c \in \{-1, 1\}$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)^3 - 3(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b) - 6abc\\ a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b &= \underbrace{(ab+bc+ca)}_{=0}(a+b+c) - 3abc\end{aligned}$$

Donc finalement :

$$1 = a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 + 3abc$$

et donc $a+b+c = 1$. On a donc

$$\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + k$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{P}'_k = 3\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}$$

ce qui fournit le tableau de variations

$$\begin{array}{c|ccccc} & & 0 & & \frac{2}{3} & \\ \hline \mathrm{P}'_k & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline \mathrm{P}_k & & k & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & \frac{-4}{27}+k & \end{array}$$

P_k possède trois racines réelles donc P_k s'annule entre 0 et $\frac{2}{3}$, ce qui impose $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$.

Condition suffisante. Ça paraît à présent évident avec les calculs faits auparavant, que l'on peut remonter pour tomber sur M orthogonale de déterminant 1.

Remarque 37.10.1. On a ici étudié et montré

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[\mathrm{J}] \cap \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) &\equiv \begin{cases} ab+bc+ca = 0 \\ a+b+c = 1\end{cases}\\ &\equiv \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ a+b+c = 1\end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{où } \mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

qui est donc l'intersection d'une sphère et d'un hyperplan, donc soit vide, réduite à un point, ou un cercle ; dans notre cas, c'est un cercle. Par ailleurs,

$$\mathbb{R}[\mathrm{J}] \cap \mathcal{O}_3^-(\mathbb{R}) = \mathbb{R}[\mathrm{J}] \cap (-\mathrm{I}_n \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})) \equiv \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ a+b+c = -1 \end{cases}$$

□

Exercice 37.11 (Réduction des endomorphismes orthogonaux)**.** Soit $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.
Montrer qu'il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, un unique triplet $(p,q,s) \in \mathbb{N}^3$ et un unique s-uplet $(\theta_1, ..., \theta_s)$ de $]0,\pi[^s$ tels que

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & & & & 0 \\ & -\mathrm{I}_q & & & \\ & & \mathrm{R}_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \mathrm{R}_{\theta_s} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}$$

Exercice 37.12. Montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 37.13. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Solution. — Cas particulier $n = 2$.

$$\Gamma = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2 = 1\}.$$

L'application suivante permet un paramétrage du cercle (moins le point $(-1,0)$) :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \Gamma \setminus \{(-1,0\} \\ t & \mapsto & \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right) \end{cases}$$

On montre facilement que $\varphi(\mathbb{Q})$ est dense dans Γ, or $\varphi(\mathbb{Q}) \subset \Gamma \cap \mathbb{Q}^2$. Par ailleurs, on sait que

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R}\right\} \bigcup \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

De là il est facile de conclure.

— Cas général.
On assimile $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $\mathrm{U} \in \mathbb{Q}^n \backslash \{0\}$. Posons $\mathrm{H} = \mathrm{U}^\perp$ et montrons que la symétrie orthogonale par rapport à H notée σ_{H} est dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q}) = \mathcal{O}(\mathbb{Q}^n)$.

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{H}} &= p_{\mathrm{H}} - p_{\mathbb{R}\mathrm{U}} \\ &= id_{\mathbb{R}^n} - 2p_{\mathbb{R}\mathrm{U}} \\ [\sigma_{\mathrm{H}}] &= \mathrm{I}_n - 2\frac{(\langle u_i | u_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}}{\sum_{i=1}^n u_i^2} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Écrivons A comme limite de matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$. Il existe $\mathrm{U}_1, ..., \mathrm{U}_t$ des vecteurs de $\mathcal{R}^n$ tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{S}_{\mathrm{U}_1} \times ... \times \mathrm{S}_{\mathrm{U}_t} \qquad \text{où } \mathrm{S}_{\mathrm{U}_i} = \mathrm{I}_n - 2\frac{\mathrm{U}_i\,{}^t\mathrm{U}_i}{{}^t\mathrm{U}_i\mathrm{U}_i},\ 1 \leq i \leq t.$$

Comme $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, on dispose de suites dans $\mathbb{Q}^n$ convergeant vers les U_1, ... , U_t, dont les symétries associées ont leur matrices à coefficients rationnels, d'après ce qui précède. La continuité des opérations permet de conclure.

$$\boxed{\overline{\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})} = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

□

Exercice 37.14. Soient $(\mathrm{E}, \langle \mid \rangle)$ un e.v.e et $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.

1. Montrer

$$(f^p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff f = id_{\mathrm{E}}.$$

2. Montrer que

$$\frac{id_{\mathrm{E}} + f + ... + f^p}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_{\mathrm{F}} \qquad \text{où } \mathrm{F} = \ker(f - id_{\mathrm{E}}).$$

<u>*Solution.*</u> **1.** Condition suffisante. C'est clair.

Condition nécessaire. Il suffit de constater :

$$|||f^{p+1} - f^p||| = |||(f - id)f^p||| = ... = |||f - id|||$$

or $|||f^{p+1} - f^p||| \to 0$ donc $f = id$.

2. On a $f(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ donc, si $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$, $f(\mathrm{G}) \subset \mathrm{G}$ et f induit des automorphismes orthogonaux sur F et G ; soient β_F et β_G deux bases orthonormées qui réduisent f_F et f_G les induits de f respectivement sur F et G. On note p la dimension de F et β la réunion des deux bases précédentes. Alors

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & [f]_{\beta_\mathrm{G}} \end{pmatrix}$$

où

$$[f_\mathrm{G}]_{\beta_\mathrm{G}} = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_q & & & 0 \\ & \mathrm{R}_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{R}_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

Posons (m_n) la suite des moyennes de Cesàro de f.

$$[m_n]_\beta = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n [f]^i_{\beta_\mathrm{G}} \end{pmatrix}$$

où

$$[f_\mathrm{G}]^i_{\beta_\mathrm{G}} = \begin{pmatrix} (-1)^i\mathrm{I}_q & & & 0 \\ & \mathrm{R}_{i\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{R}_{i\theta_s} \end{pmatrix}$$

et par morphisme d'algèbre $a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ la moyenne de Cesàro $\frac{\sum_{i=0}^n \mathrm{R}_{i\theta_k}}{n+1}$ tend vers 0 pour tout $1 \leq k \leq s$. Conclusion : $\boxed{m_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_\mathrm{F}.}$

□

Exercice 37.15. Soient $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ un e.v.e et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

1. Montrer que f est affine et que $\vec{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$.

2. Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{D}(x) = \|f(x) - x\|^2$ et $\mu = \inf_{x \in \mathrm{E}} \mathrm{D}(x)$.

Montrer que μ est atteint sur un sous-espace affine de E, de direction $\mathrm{E}(\vec{f}) = \{x \in \mathrm{E} \mid \vec{f}(x) = x\}$.

<u>*Solution*</u>. **1.** On pose $g = f - f(0)$ et on procède comme dans l'exercice 37.4, car g conserve la norme euclidien donc le produit scalaire.

2. L'ensemble

$$\mathrm{A} = \{\|f(x) - x\|^2 \mid x \in \mathrm{E}\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. On peut la réécrire :

$$\mathrm{A} = \{\|f(0) + \vec{f}(x) - x\|^2 \mid x \in \mathrm{E}\} = \{\|f(0) - u\|^2 \mid y \in \underbrace{\mathrm{Im}(id - \vec{f})}_{\mathrm{V}}\}$$

$\mu = d(f(0), \mathrm{V})$ est atteint en le projeté orthogonal de $f(0)$ sur V, que l'on note ω. Donc μ est atteint par les points $x \in \mathrm{E}$ tels que $x - \vec{f} = \omega$. Cela correspond à l'ensemble

$$\mathrm{L} = (id - \vec{f})^{-1}(\{\omega\})$$

qui est soit vide soit un sous-espace affine de direction $\ker(id - \vec{f})$.

$\square$

Exercice 37.16. Soit E un espace affine euclidien de dimension n. Soient $\Pi_1, ..., \Pi_n$ des hyperplans affines de E, dont on suppose que l'intersection est un singleton. On donne $b \in \mathrm{E}$ et on définit par récurrence la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$a_0 = b \text{ et pour } k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \pi_i(a_{k-1}) \text{ où} i \equiv k\,[n]$$

où π_i projecteur orthogonal sur Π_i.
Montrer que $a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \omega$. Application à la résolution des systèmes numériques ?

Exercice 37.17. Montrer que $(\mathfrak{S}_{n+1}, \circ)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

<u>*Solution*</u>. Il s'agit donc de montrer que $\mathfrak{S}_{n+1}$ se plonge dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

On se donne $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ un e.v.e de dimension $n+1$ et $(e_1, ..., e_{n+1})$ une base orthonormée de E. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on définit $\varphi_\sigma \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par $\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour $1 \leq i \leq n+1$ (on fait agir $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur les b.o.n). On vérifie que l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_{n+1} & \to & \mathcal{O}(\mathrm{E}) \\ \sigma & \mapsto & \varphi_\sigma \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe, dont le noyau est l'identité : on a ainsi injecté $\mathfrak{S}_{n+1}$ dans $\mathcal{O}(\mathrm{E})$. Reste à enlever une dimension.

Il s'agit de trouver un s.e.v de E stable par tous les φ_σ. Une droite stable par tous les φ_σ est $\mathbb{R}(\sum_{i=1}^{n+1} e_i)$. Considérons l'hyperplan H défini par

$$\mathrm{H} \equiv x_1 + ... + x_{n+1} = 0$$

qui est bien stable par tous les φ_σ. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on note $g_\sigma \in \mathcal{O}(\mathrm{H})$ l'induit de φ_σ sur H. L'application

$$\Phi_{\mathrm{H}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_{n+1} & \to & \mathcal{O}(\mathrm{H}) \\ \sigma & \mapsto & g_\sigma \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes injectif : si $g_\sigma = g_{\sigma'}$ alors $f_{\sigma\,|\mathrm{H}} = f_{\sigma'\,|\mathrm{H}}$. Par ailleurs on a vu que $f_{\sigma\,|\mathrm{H}^\perp} = id_{\mathrm{H}^\perp} = f_{\sigma'\,|\mathrm{H}^\perp}$. Donc f_σ et $f_{\sigma'}$ coïncident sur $\mathrm{H} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{H}^\perp = \mathrm{E}$. Finalement

$$\boxed{\mathfrak{S}_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{H}) \hookrightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

$\square$

Remarque 37.17.1. Il est légitime de se demander si on ne peut pas descendre encore d'une dimension. Ce n'est pas vrai dans plusieurs cas particuliers : $\mathfrak{S}_2$, de cardinal 2, ne se plonge pas dans $\mathcal{O}_0(\mathbb{R})$, de cardinal éventuellement 1. De même pour $\mathfrak{S}_3$ et $\mathcal{O}_1(\mathbb{R})$.

$\mathfrak{S}_4$ se plonge-t-il dans $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$? Supposons par l'absurde que oui, et donnons-nous P un plan euclidien orienté et Φ un morphisme injectif de groupe de $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathcal{O}_(\mathrm{P})$. De là,

$$\begin{aligned} (1,2,3) &= (1,3,2)^2 \\ \Phi((1,2,3)) &= \Phi((1,3,2))^2 \\ \det \Phi((1,2,3)) &= \det \Phi((1,3,2))^2 = 1 \end{aligned}$$

En fait tous les 3-cycles sont envoyés dans $\mathcal{SO}(\mathrm{P})$ qui est commutatif. Or

$$(1,2,3) \circ (1,2,4) \neq (1,2,4) \circ (1,2,3)$$

ce qui mène à une absurdité, puisque Φ est un morphisme injectif.

Exercice 37.18. Soit $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ e.v.e de dimension 3. Déterminer les sous-groupes de $(\mathcal{O}(\mathrm{E}), \circ)$ de cardinal 4.

Chapitre 38

Endomorphismes auto-adjoints et compagnie

Exercice 38.1 (Théorème spectral)**.** Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$f \in \mathcal{S}(\mathrm{E}) \iff f \text{ est diagonalisable dans une base orthonormée.}$$

Exercice 38.2 (Réduction des antisymétriques)**.** Énoncer et prouver un théorème de réduction pour les endomorphismes antisymétriques d'un espace euclidien.

Solution.

$$\mathcal{SE} = \{f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mid \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle f(x)|y\rangle = -\langle x|f(y)\rangle\}$$

On prouver aisément les lemmes suivants :

Lemme 38.2.1. *Soit $f \in \mathcal{AS}(\mathrm{E})$ et* F *stable par f. Alors $\mathrm{F}^\perp$ est stable par f.*

Lemme 38.2.2. *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie possède une droite ou un plan stable.*

Lemme 38.2.3. *Si $\dim \mathrm{E} = 1$, alors $\mathcal{AS}(\mathrm{E}) = \{0\}$.*

Si $\dim \mathrm{E} = 2$, alors tout f dans $\mathcal{AS}(\mathrm{E})$ est réductible dans une b.o.n $\mathcal{B}$ sous la forme

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha > 0$.

On prouve alors le résultat suivant par récurrence :

Théorème 38.2.1 (Réduction des antisymétriques)**.** *Soit $f \in \mathcal{AS}(\mathrm{E})$. Il existe $\mathcal{B}$ b.o.n de* E*, $p, s \in \mathbb{N}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathbb{R}_+^*$ tels que*

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & & & \\ & \alpha_1 \mathrm{J} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_s \mathrm{J} \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□

Exercice 38.3 (Extraction de racine carrée dans $\mathcal{S}^{++}(\mathrm{E})$)**.** Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{S}^{++}(\mathrm{E})$ l'ensemble des auto-adjoints définis positifs.

1. Montrer que
$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{S}^{++}(\mathrm{E}) & \to & \mathcal{S}^{++}(\mathrm{E}) \\ f & \mapsto & f^2 \end{array} \right.$$
est bien définie et bijective.

2. Montrer que Φ est un homéomorphisme.

Exercice 38.4. Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Montrer que
$$\det \mathrm{A} \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Solution. Comme A est symétrique positive, il existe B symétrique positive telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. On a alors avec l'inégalité d'Hadamard :
$$\det \mathrm{A} = (\det \mathrm{B})^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2 \right) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$$
□

Exercice 38.5 (Décomposition polaire)**.** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe un unique couple $(\mathrm{O}, \mathrm{S}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathrm{R})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$.

Solution. Supposons que tel soit le cas : $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ comme dans l'énoncé. Alors
$${}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{S}{}^t\mathrm{O} = \mathrm{SO}^{-1}$$
d'où ${}^t\mathrm{AA} = \mathrm{S}^2$.

Reprenons à présent la démonstration. ${}^t\mathrm{AA} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc on dispose d'une unique matrice définie positive telle que $\mathrm{S}^2 = {}^t\mathrm{AA}$. On pose de plus $\mathrm{O} = \mathrm{AS}^{-1}$ et on a alors
$${}^t\mathrm{OO} = ({}^t\mathrm{S})^{-1}{}^t\mathrm{AAS}^{-1} = ({}^t\mathrm{S})^{-1}{}^t\mathrm{SSS}^{-1} = \mathrm{I}_n$$
ce qui fournit le résultat.

Par ailleurs, puisque l'extraction de racine carrée est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur lui-même, et que la matrice orthogonale dans la décomposition polaire est déduite de la racine de ${}^t\mathrm{AA}$, $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. □

Exercice 38.6 (Théorème du min-max)**.** Soit $(\mathrm{E}, \langle \, | \, \rangle)$ un e.v.e et $f \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. On note $\lambda_1(f), \leq ... \leq \lambda_n(f)$ les valeurs propres de f comptées avec leur ordre de multiplicité.

1. Montrer que
$$\lambda_i(f) = \inf_{\substack{\mathrm{F} \in \mathcal{G}(\mathrm{E}) \\ \dim \mathrm{F} = i}} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathrm{F}}} \langle f(x) | x \rangle .$$

2. En déduire la continuité de l'application
$$\lambda_i : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\mathrm{E}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \lambda_i(f) \end{array} \right.$$

<u>*Solution.*</u> **1.** Soit $(e_1, ..., e_n)$ une b.o.n de E telle que

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\} \quad f(e_i) = \lambda_i(f)e_i.$$

Fixons $1 \leq i \leq n$ et posons $\mathrm{F}_i = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i) \in \mathcal{G}_i(\mathrm{E})$. Soit $x \in \mathrm{F}_i$, unitaire.

$$\langle f(x)|x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{i} x_j\lambda_j e_j \middle| \sum_{k=1}^{i} x_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{i} \lambda_k x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{i} \lambda_i x_k^2 = \lambda_i$$

et prenant $x = e_i$ on a l'égalité. Donc

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in \mathrm{F}_i}} \langle f(x)|x\rangle = \lambda_i$$

Soit F un s.e.v de E de dimension i. Posons $\mathrm{G}_i = \mathrm{Vect}(e_i, ..., e_n)$ qui est de dimension $n - i + 1$. On a

$$\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}_i) = \dim \mathrm{G}_i + \dim \mathrm{F} - \dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}_i) = n - i + 1 + i - \dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}_i) = n + 1 - \dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}_i) \geq n + 1 - n = 1$$

donc on dispose, quitte à normaliser, d'un $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}_i$ unitaire.

$$x = \sum_{j=i}^{n} x_j e_j$$

$$\langle f(x)|x\rangle = \left\langle \sum_{j=i}^{n} \lambda_j x_j e_j \middle| \sum_{k=i}^{n} x_k e_k \right\rangle = \sum_{j=i}^{n} \lambda_j x_j^2 \geq \lambda_i$$

ce qui fournit

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in \mathrm{F}}} \langle f(x)|x\rangle \geq \lambda_i$$

or la borne λ_i est atteinte comme on l'a montré précédemment, et on a donc le résultat.

2. Il s'agit d'abord de montrer que l'inf ou le sup d'un ensemble de fonctions lipschitziennes l'est également ; il suffit alors de l'appliquer à

$$\psi_{\mathrm{F},x} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \langle f(x)|x\rangle \end{array} \right.$$

pour $\mathrm{F} \in \mathcal{G}_i$ et $x \in \mathrm{F}$ normé.

□

Exercice 38.7 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)**.** On se place dans un e.v.e E et on se donne $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $p \circ p = \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
Établir l'équivalence des assertions suivantes :

(i) p est un projecteur orthogonal

(ii) $\forall x \in \mathrm{E}\ \|p(x)\| \leq \|x\|$

(iii) p est auto-adjoint.

Solution. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. La réunion d'une b.o.n de $\operatorname{Im} p$ et de $\ker p$ permet de diagonaliser p dans une b.o.n de E ; le théorème spectral permet d'en conclure que p est symétrique.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*. Il suffit de développer $\|p(x)+x-p(x)\|$ pour x dans E et d'utiliser la propriété de symétrie.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Méthode variationnelle, *cf* chapitre précédent : $\|p(\lambda x+\mu y)\| \leq \|\lambda x+\mu y\|$ où $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \ker p$, ceci étant vrai pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on élève au carré et développe, on fait sortir le jus. □

Exercice 38.8. Soit $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ un e.v.e de dimension n et $f \in \mathcal{S}^+(\mathrm{E})$.
Montrer que
$$1+(\det f)^{\frac{1}{n}} \leq (\det(id_{\mathrm{E}}+f))^{\frac{1}{n}}\,.$$

Solution. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres réelles de f. Si 0 est valeur propre de f, on a le résultat. Sinon, pour $1 \leq i \leq n$ soit $\mu_i \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda_i = e^{\mu_i}$. La fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$ étant convexe,
$$\ln\left(1+e^{\frac{\mu_1+\ldots+\mu_n}{n}}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln\left(1+e^{\mu_i}\right)}{n}$$
ce qui fournit en passant à l'exponentielle
$$1+e^{\frac{\mu_1+\ldots+\mu_n}{n}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(1+e^{\mu_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$
et on a ainsi notre résultat. □

Exercice 38.9. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un e.v.e $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$.
Montrer que E est somme orthogonale de s.e.v de dimension 1 ou 2 stables par p et q.

Solution. Il suffit de montrer qu'il existe une droite ou un plan stable par p et q. Comme ceux-ci sont auto-adjoints, l'orthogonal de ce s.e.v sera également stable par p et q et on pourra en déduire le résultat par récurrence.

$p+q$ est symétrique. Soient λ une valeur propre de $p+q$ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé.
$$(p+q)(x) = \lambda x$$
Considérons $\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(x, p(x))$. On vérifie que F est stable par q, en plus de l'être évidemment par p. □

Exercice 38.10. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(\mathrm{A}) = \exp(\mathrm{B})$.
Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Exercice 38.11. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$({}^t\mathrm{XY})^2 \leq ({}^t\mathrm{XAX})({}^t\mathrm{YA}^{-1}\mathrm{Y}).$$

Solution. On ortho-diagonalise A comme d'habitude : soient $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ tels que $\mathrm{A} = {}^t\Omega\mathrm{D}\Omega$. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} {}^t\mathrm{XAX} &= {}^t\mathrm{X}{}^t\Omega\mathrm{D}\Omega\mathrm{X} = {}^t(\Omega\mathrm{X})\mathrm{D}\Omega\mathrm{X} \\ {}^t\mathrm{YA}^{-1}\mathrm{Y} &= {}^t(\Omega\mathrm{Y})\mathrm{D}^{-1}\Omega\mathrm{Y} \\ {}^t\mathrm{XY} &= {}^t(\mathrm{X}\Omega)\Omega\mathrm{Y} \end{aligned}$$

On a donc

$(\forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ({}^t\mathrm{XY})^2 \leq ({}^t\mathrm{XAX})({}^t\mathrm{YA}^{-1}\mathrm{Y})) \Longleftrightarrow (\forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ({}^t\mathrm{XY})^2 \leq ({}^t\mathrm{XDX})({}^t\mathrm{YD}^{-1}\mathrm{Y}).)$

Si $\mathrm{X} = {}^t(x_1, ..., x_n)$ et $\mathrm{Y} = {}^t(y_1, ..., y_n)$, on veut donc montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\lambda_i}\right)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs

$$\mathrm{X}_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} x_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_n} x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{\lambda_1}} \\ \vdots \\ \frac{y_n}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

fournit le résultat. □

Exercice 38.12. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$${}^t\mathrm{MM}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$$

Solution. Soit M une solution. ${}^t\mathrm{MM}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ donc M est inversible et

$$\begin{aligned} {}^t\mathrm{MM} &= {}^t\mathrm{M}^{-1} \\ {}^t\mathrm{M} &= {}^t\mathrm{M}^{-1}\mathrm{M}^{-1} \\ \mathrm{M} &= {}^t\mathrm{M}^{-1}\mathrm{M}^{-1} = (\mathrm{M}^t\mathrm{M})^{-1} \end{aligned}$$

donc M est symétrique et positive. Ses valeurs propres sont réelles et $\mathrm{M}^3 = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$. La réciproque est immédiate. □

Exercice 38.13. Soit $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ où E euclidien. Calculer le déterminant de

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathrm{E}) & \to \quad \mathcal{S}(\mathrm{E}) \\ \quad s & \mapsto \quad a^* \circ s \circ a \end{cases}$$

Solution. φ_a est bien définie et linéaire.

Traitons d'abord le cas où $a \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$. Soit β une b.o.n de E qui orthodiagonalise a. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres réelles. On définit $f_{ij} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ par $[f_{ij}]_\beta = \mathrm{E}^{ij}$ et alors si $g_{ij} = f_{ij} + f_{ij}$, la famille $(g_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est une base de $\mathcal{S}(\mathrm{E})$. On a

$$a^* \circ (f_{ij} + f_{ji}) \circ a = \lambda_i\lambda_j f_{ij} + \lambda_j\lambda_i f_{ji} = \lambda_i\lambda_j g_{ij}$$

donc (g_{ij}) est une base de $\mathcal{S}(\mathrm{E})$ qui diagonalise φ_a. On a alors

$$\det \varphi_a = \prod_{1\leq i\leq j\leq n} \lambda_i\lambda_j = (\det a)^{n+1}$$

et pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\det \varphi_{ra} = \det(r^2\varphi_a) = (r^2)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det \varphi_a = (r^n \det a)^{n(n+1)}$$

Traitons à présent le cas général $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Il existe $\omega \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $s \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ tels que $a = \omega \circ s$. Il existe $\sigma_1, ..., \sigma_t$ des réflexions telles que $\omega = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_t$. De là,

$$\det \varphi_a = \det \varphi_{\sigma_1} \times ... \times \det \varphi_{\sigma_t} \times \det \varphi_s = ... = (\det a)^{n+1}$$

□

Exercice 38.14. Soit $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ e.v.e. Déterminer :

1. le s.e.v de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ engendré par les projecteurs ;
2. le s.e.v de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ engendré par les projecteurs orthogonaux.

Exercice 38.15 (Matrices antisymétriques)**.** On note

$$\mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}\}$$

et on donne M dans $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si n est impair, alors $\det \mathrm{M} = 0$.
2. Montrer que $\det \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\operatorname{rg} \mathrm{M}$ est pair.

Solution. **1.** On a :

$$\det \mathrm{M} = \det {}^t\mathrm{M} = \det -\mathrm{M} = (-1)^n \det \mathrm{M}$$

donc $\boxed{\text{si } n \text{ est impair, } \det \mathrm{M} = 0.}$

2. Le cas n impair est évident d'après ce qui précède. On suppose dans la suite n pair. Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$ {}^t\mathrm{XMX} = {}^t({}^t\mathrm{XMX}) = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{MX} = -{}^t\mathrm{XMX}$$

donc ${}^t\mathrm{XMX} = 0$. Soit λ une valeur propre réelle de M, et X un vecteur propre non nul associé.

$$\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}$$
$${}^t\mathrm{XMX} = \lambda \underbrace{{}^t\mathrm{XX}}_{\neq 0}$$

donc $\lambda = 0$.
Le cas $\mathrm{M} \notin \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est évident. Supposons donc M inversible. M n'a donc pas de valeur propre réelle. χ_M, polynôme réelle de degré pair, est donc à racines complexes conjuguées. Le déterminant de M est donné par le produit de ses racines, soit un produit de modules au carré, donc $\det \mathrm{M}$ est un carré, et en particulier $\boxed{\det \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+.}$

3. On se donne $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ un e.v.e et β une b.o.n de E. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{M} = [\varphi]_\beta$. Alors $\varphi^* = -\varphi$ et notamment

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \langle \varphi(x) | x \rangle = 0$$

Soit F un s.e.v stable par φ. Alors $\mathrm{F}^\perp$ est également stable par φ. On choisit $\mathrm{F} = \operatorname{Im} \varphi$, et on note φ_F l'induit antisymétrique de φ sur F.

$$\varphi_\mathrm{F}(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0\}$$

donc $\mathrm{F}^\perp \subset \ker \varphi$ et le théorème du rang assure l'égalité. Donc φ_F est un isomorphisme, antisymétrique, de déterminant non nul, donc $\dim \mathrm{F}$ est pair et $\boxed{\operatorname{rg} \mathrm{M} \text{ pair.}}$

□

Exercice 38.16. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in]0,1[$ vérifiant $\alpha+\beta=1$.
Montrer que
$$(\det \mathrm{A})^{\alpha} (\det \mathrm{B})^{\beta} \leq \det(\alpha \mathrm{A}+\beta \mathrm{B}).$$

Exercice 38.17 (Déterminant de Gram)**.** Soit $(\mathrm{E}, \langle\,|\,\rangle)$ un e.v.e. Pour $x_1, ..., x_m \in \mathrm{E}$ on pose
$$\mathrm{G}(x_1, ..., x_m) = \det\left(\langle x_i | x_j \rangle\right).$$

1. Montrer que $\mathrm{G}(x_1, ..., x_m) \geq 0$ et que $\mathrm{G}(x_1, ..., x_m) = 0$ ssi $(x_1, ..., x_m)$ lié.
2. Soit $(x_1, ..., x_m)$ un système libre de E, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_m)$ et $z \in \mathrm{E}$. Montrer que
$$d(z, \mathrm{F}) = \sqrt{\frac{\mathrm{G}(x_1, ..., x_m, z)}{\mathrm{G}(x_1, ..., x_m)}}.$$

Solution. **1.** La matrice associée au déterminant de Gram, notée M, est dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, c'est aisé à vérifier. Son spectre est donc dans $\mathbb{R}_+$, et par suite son déterminant aussi.

Si $(x_1, ..., x_m)$ est lié, alors on remarque qu'il en va de même des colonnes de la matrice de Gram.

Réciproquement, si $\mathrm{G}(x_1, ..., x_m) = 0$, on dispose de $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ non nul annulant M. Cela donne même
$$(\lambda_1 \;...\; \lambda_m)\mathrm{M}\,{}^t(\lambda_1 \;...\; \lambda_m) = 0$$
c'est à dire $\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \|^2 = 0$. C'est ce que l'on veut.

2. On pose $z = u + y$ avec $(u, y) \in \mathrm{F} \times \mathrm{F}^{\perp}$. On a donc $(d(\mathrm{F}), z)^2 = \|y\|^2$. Par ailleurs, $u = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m$. De là,
$$\mathrm{G}(x_1, ..., x_m, z) = \mathrm{G}(x_1, ..., x_m, y+u) = \begin{vmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \cdots & \langle x_1|x_m\rangle & \langle x_1|y+u\rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_m|x_1\rangle & \cdots & \langle x_m|x_m\rangle & \langle x_m|y+u\rangle \\ \langle y+u|x_1\rangle & \cdots & \langle y+u|x_m\rangle & \langle y+u|y+u\rangle \end{vmatrix}$$
ce qui fournit par l'opération
$$\mathrm{C}_{m+1} \longleftarrow \mathrm{C}_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{C}_i$$
l'expression
$$\mathrm{G}(x_1, ..., x_m, z) = \begin{vmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \cdots & \langle x_1|x_m\rangle & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_m|x_1\rangle & \cdots & \langle x_m|x_m\rangle & 0 \\ \langle y+u|x_1\rangle & \cdots & \langle y+u|x_m\rangle & \|y\|^2 \end{vmatrix}$$
et en développant par rapport à la dernière colonne, on a finalement
$$\boxed{\mathrm{G}(x_1, ..., x_m, z) = \|y\|^2 \mathrm{G}(x_1, ..., x_m)}$$

□

Exercice 38.18 (Ordre partiel sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$)**.** On définit sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la relation $\leq$ par :

$$\mathrm{A} \leq \mathrm{B} \Longleftrightarrow \forall\, \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\mathrm{XAX} \leq {}^t\mathrm{XBX}$$

1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre.

2. Montrer que toute suite croissante et majorée de $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \leq)$ converge.

Solution. **1.** La relation $\leq$ est clairement réflexive et transitive. Soient A et B des matrices réelles symétriques telles que $\mathrm{A} \leq \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \leq \mathrm{A}$. Alors $\mathrm{C} = \mathrm{B} - \mathrm{A}$ vérifie :

$$\forall\, \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^t\mathrm{XCX} = 0$$

On vérifie alors aisément que si λ est une valeur propre de C, alors $\lambda = 0$ et, puisque C est diagonalisable, $\mathrm{C} = 0$. Donc $\leq$ est antisymétrique.

2. Soit $(\mathrm{A}_p) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}^*}$ croissante et majorée.

$$(\mathrm{A}_p) \text{ converge } \Longrightarrow (\mathrm{A}_p) \text{ converge coefficients par coefficients}$$

Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{A}_p \leq \mathrm{B}$. Pour tout X vecteur colonne, ${}^t\mathrm{XA}_p\mathrm{X}$ est croissante et majorée donc converge. Donnons-nous X et Y deux vecteurs colonnes.

$${}^t(\mathrm{X}+\mathrm{Y})\mathrm{A}_p(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \underbrace{{}^t\mathrm{XA}_p\mathrm{X}}_{\mathrm{cv}} + \underbrace{{}^t\mathrm{YA}_p\mathrm{Y}}_{\mathrm{cv}} + 2\,{}^t\mathrm{YA}_p\mathrm{X}$$

donc ${}^t\mathrm{YA}_p\mathrm{X}$ converge. Avec $\mathrm{X} = \mathrm{E}^i$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{E}^j$, ${}^t\mathrm{YA}_p\mathrm{X} = (\mathrm{A}_p)_{ij}$ et on obtient donc la convergence coefficients par coefficients de (A_p).

$$\boxed{\text{Toute suite croissante et majorée de } (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \leq) \text{ converge.}}$$

□

Exercice 38.19 (Une caractérisation des matrices diagonalisables)**.** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$\mathrm{A} \text{ diagonalisable } \Longleftrightarrow \exists\, \mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ {}^t\mathrm{A} = \mathrm{SAS}^{-1}$$

Solution. Condition nécessaire. On suppose A diagonalisable. On peut donc écrire

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$$

avec D diagonale et P inversible, et on a donc

$${}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{P}^{-1}\mathrm{D}\,{}^t\mathrm{P} = {}^t\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\,{}^t\mathrm{P} = (\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{P})^{-1}\mathrm{AP}\,{}^t\mathrm{P}$$

avec $\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{P} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ comme il est aisé à montrer.

Condition suffisante. On se donne $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}$ tel que ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{SAS}^{-1}$. Soit P inversible tel que $\mathrm{S} = {}^t\mathrm{PP}$ (par extraction de racine carrée ou par décomposition LU, par exemple).

$$\begin{aligned} {}^t\mathrm{A} &= \mathrm{SAS}^{-1} \\ {}^t\mathrm{AS} &= \mathrm{SA} \\ {}^t(\mathrm{SA}) &= \mathrm{SA} \end{aligned}$$

donc $B = SA$ est symétrique. De là,

$$A = S^{-1}SA = (P^tP)^{-1}B = P^{-1}\underbrace{(({}^tP)^{-1}BP^{-1})}_{\text{symétrique}}P$$

donc A est semblable à une matrice diagonalisable, donc est diagonalisable.

$$\boxed{A \text{ diagonalisable } \iff \exists S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ {}^tA = SAS^{-1}}$$

□

Exercice 38.20. E un e.v.e. On se place dans $\mathcal{S}(E)$. Montrer

$$\overline{\mathcal{S}^{++}(E)} = S^{+}(E) \qquad \text{et} \qquad \overset{\circ}{\mathcal{S}^{+}}(E) = \mathcal{S}^{++}(E)$$

Solution. — $\underline{\overline{\mathcal{S}^{++}(E)} = \mathcal{S}^{+}(E) :}$ $\mathcal{S}^{+}(E)$ est un fermé de $\mathcal{S}(E)$ donc on a déjà l'inclusion directe.
Soit $f \in \mathcal{S}^{+}(E)$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_p = f + \frac{1}{p} id \in \mathcal{S}^{++}(E)$$

de telle sorte que $f_p \to f$. On a prouvé l'autre inclusion.

$$\boxed{\overline{\mathcal{S}^{++}(E)} = \mathcal{S}^{+}(E)}$$

— $\underline{\overset{\circ}{\mathcal{S}^{+}}(E) = \mathcal{S}^{++}(E) :}$ montrons d'abord que $S^{++}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{S}(E)$. Soit $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ et $r = \frac{\lambda_1(f)}{2}$ où λ_1 est la plus petite valeur propre (strictement positive) de f. Soit $g \in B(f, r)$ au sens de $|||.|||$. Pour $x \in E$ non nul,

$$\begin{aligned}\langle g(x)|x\rangle &= \langle f(x)|x\rangle - \langle (f-g)(x)|x\rangle \\ &\geq \langle f(x)|x\rangle - |||f-g||| \|x\|^2 \\ &\geq \langle f(x)|x\rangle - r\|x\|^2 \\ &\geq \lambda_1(f)\|x\|^2 - r\|x\|^2 > 0\end{aligned}$$

donc $g \in \mathcal{S}^{++}(E)$. $\boxed{S^{++}(E) \text{ est un ouvert de } (\mathcal{S}(E), |||.|||).}$

De fait, on a $\mathcal{S}^{++}(E) \subset \overset{\circ}{\mathcal{S}^{+}}(E)$. Reste à prouver l'autre inclusion.
Raisonnons par l'absurde et donnons-nous $f \in \mathcal{S}^{+}(E) \setminus \mathcal{S}^{++}(E)$. On a nécessairement $\lambda_1(f) = 0$. Soit $r > 0$ tel que

$$B(f, r) \subset \overset{\circ}{\mathcal{S}^{+}}(E)$$

$f - \frac{r}{2} id \in \overset{\circ}{\mathcal{S}^{+}}(E)$. Soit x un vecteur propre associé à 0.

$$0 \leq \left\langle f(x) - \frac{r}{2}x \middle| x \right\rangle = -\frac{r}{2}\|x\|^2 < 0$$

Absurde. Finalement on a bien

$$\boxed{\overset{\circ}{\mathcal{S}^{+}}(E) = \mathcal{S}^{++}(E)}$$

□

Exercice 38.21. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall\, i \in \{1, ..., n\}\ \mu_i(\mathrm{A}) > 0$$

où $\mu_i(\mathrm{A})$ désigne le $i^{\text{ème}}$ mineur principal de A.

Solution. Condition nécessaire. On suppose $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour $1 \leq i \leq n$

$$\mathrm{A}^{(i)} = (\mathrm{A}_{kl})_{1 \leq l,k \leq i}$$

est symétrique définie positive : en effet, pour $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^i$,

$${}^t\mathrm{X}\mathrm{A}^{(i)}\mathrm{X} = {}^t\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{A} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

Par conséquent,

$$\mu_i(\mathrm{A}) = \det \mathrm{A}^{(i)} = \prod_{j=1}^{i} \lambda_j(\mathrm{A}^{(i)}) > 0.$$

Condition suffisante. Si tous les mineurs principaux sont strictement positifs, ils sont en particulier non nuls, donc A possède une décomposition LU.

$$\mathrm{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\mathrm{U}} = \mathrm{L} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\mathrm{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{M}}$$

L'unicité de la décomposition LU fournit

$${}^t\mathrm{M} = \mathrm{L} \qquad \text{et} \qquad {}^t(\mathrm{LD}) = \mathrm{U}$$

ce qui finalement permet d'écrire

$$\mathrm{A} = {}^t\mathrm{MDM}$$

or tous les λ_i sont > 0 (par récurrence finie) donc A est symétrique définie positive : aisé à vérifier par produit scalaire, puisque M est inversible et les $\lambda_i > 0$.

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall\, i \in \{1, ..., n\}\ \mu_i(\mathrm{A}) > 0}$$

□

Exercice 38.22 (Théorème spectral, forme matricielle «ultime»)**.** Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe P inversible et D diagonale telles que

$$\mathrm{A} = {}^t\mathrm{PP} \qquad \mathrm{B} = {}^t\mathrm{PDP}$$

<u>*Solution.*</u> On cherche $\mathrm{Q} \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{Q}\mathrm{Q}$.

<u>1ère méthode :</u> Extraction de racine carrée.

<u>2nde méthode :</u> Décomposition LU. Les mineurs principaux de A sont tous strictement positifs.

$$\mathrm{A} = \mathrm{LU} \qquad \text{où } \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\mu_i(\mathrm{A}) = \lambda_1 ... \lambda_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On peut réécrire

$$\mathrm{A} = \mathrm{L} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathrm{U}' \qquad \text{où } \mathrm{U}' = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

et en passant à la transposée

$${}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{U}' \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^t\mathrm{L}$$

or $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}$ donc par unicité de la décomposition LU on a ${}^t\mathrm{U}' = \mathrm{L}$. Finalement

$$\mathrm{A} = \mathrm{L} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^t\mathrm{L} = \mathrm{L} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^t\mathrm{L}$$

ce qui invite à poser $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^t\mathrm{L} \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$. On a alors $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{Q}\mathrm{Q}$.

On peut à présent définir $\mathrm{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{Q}\mathrm{S}\mathrm{Q}$. On constate que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc on dispose de D diagonale et de $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{S} = \Omega \mathrm{D} {}^t\Omega$. Finalement en posant $\mathrm{P} = {}^t\Omega\mathrm{Q}$ on a successivement :

$$\mathrm{A} = {}^t\mathrm{P}\mathrm{P} \qquad \mathrm{B} = {}^t\mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}$$

et le théorème est prouvé.

Cette décomposition est unique si l'on impose de plus $\mathrm{P} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{P} \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$. $\square$

Chapitre 39

Espaces pré-hilbertiens

Exercice 39.1 (Identité du parallélogramme)**.** Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$.
Montrer
$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$

Exercice 39.2 (Identité de la médiane)**.** Soit $(a, b, x) \in \mathrm{E}^3$. Montrer
$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2\right) - \frac{1}{4}\|b-a\|^2$$

Solution. Notons $m = \frac{a+b}{2}$.
$$\begin{aligned}\|x-m\|^2 &= \frac{1}{4}\|x-a+x-b\|^2 = \frac{1}{4}\|x-a\|^2 + \frac{1}{4}\|x-b\|^2 + \frac{1}{2}\langle x-a|x-b\rangle \\ &= \frac{1}{4}\|x-a\|^2 + \frac{1}{4}\|x-b\|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\|2x-a-b\|^2 - \|a-b\|^2}{4}\right)\end{aligned}$$
d'où
$$\frac{1}{2}\|x-m\|^2 = \frac{1}{4}(\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2) - \frac{1}{2}\frac{\|b-a\|^2}{4}.$$
□

Exercice 39.3. Soit K un convexe compact non vide de E et $a \in \mathrm{E}$. Posons
$$d = \inf\{\|x-a\|,\ x \in \mathrm{K}\}.$$
Montrer que :

1. il existe $p \in \mathrm{K}$ tel que $d = \|a-p\|$;

2. la distance est réalisée en un seul point ;

3. $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{K} \\ a & \longmapsto & p \end{array}\right.$ est continue.

Solution. **1.** La fonction
$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{K} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|a-x\| \end{array}\right.$$
est continue sur K, compact de E non vide, donc atteint son minimum.

2. Soient p et q réalisant ce minimum. Posons $m = \frac{p+q}{2}$. Alors

$$d^2 \leq \|a-m\| = \frac{1}{2}\left(\|x-p\|^2 + \|x-q\|^2\right) - \frac{1}{4}\|p-q\|^2 = d^2 - \frac{1}{4}\|p-q\|^2 \leq d$$

donc $p = q$.

3. La distance à K est continue, car 1-lipschitzienne. On montre que, si $b_n \to a$, la seule valeur d'adhérence de $(\pi(b_n))$ est $\pi(a)$. Comme K est compact, on peut conclure.

□

Exercice 39.4 (Théorème de projection)**.** Soit $u \in \mathrm{E}$ et F un s.e.v [a] de E. Montrer

$$u \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp} \iff \exists\, v \in \mathrm{F},\ \forall\, w \in \mathrm{F},\ \|u-v\| \leq \|u-w\|$$

a. Le programme stipule fermé mais *a priori* on n'en a pas besoin dans la preuve.

Exercice 39.5. Calculer

$$\inf_{\substack{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P}\ \text{unitaire}}} \int_{-1}^{1} (\mathrm{P}(t))^2 \mathrm{d}t.$$

Exercice 39.6. On considère dans cet exercice un entier $n \geq 1$.

1. Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ distincts.

a) Établir l'existence de $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}], \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}(x_i).$$

b) Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{q}[\mathrm{X}], \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}(x_i).$$

Montrer que $q \leq 2n-1$.

2. Établir l'existence de $\zeta_1, ..., \zeta_n \in [-1, 1]$ avec

$$-1 < \zeta_1 < \zeta_2 < ... < \zeta_n < 1$$

et de $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}], \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathrm{P}(\zeta_i).$$

Indication : on se placera dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ que l'on munit du produit scalaire $prodscal\mathrm{PQ} = \int_{-1}^{1} \mathrm{PQ}$ et on considèrera l'orthogonalisée de Schmidt de $(1, \mathrm{X}, ..., \mathrm{X}^n)$, soit $(\Pi_1, ..., \Pi_n)$. On montrera que Π_i est un psars dans $]-1, 1[$ et que les ζ_i sont les racines de Π_n.

3. Établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}], \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathrm{P}(\zeta_i) + \alpha \mathrm{P}^{(2n)}.$$

4. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n}$. Établir l'existence de $\omega \in]-1, 1[$ tel que :

$$\int_{-1}^{1} f = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\zeta_i) + \alpha f^{(2n)}(\omega). \tag{39.1}$$

5. Expliciter la formule (39.1) dans le cas $n = 2$.

6. Proposer une formule de calcul approché pour $\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$ où $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^4$.

Solution. **1. a)** Première méthode : polynômes d'interpolation de Lagrange fournissent

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{\mathrm{X} - x_j}{x_i - x_j} \qquad \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} \prod_{j \neq i} \frac{t - x_j}{x_i - x_j} \mathrm{d}t \right)}_{\lambda_i}$$

Seconde méthode : $\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_n}$ les évaluations en $x_1, ..., x_n$ forment une famille libre du dual de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, donc une base (cardinal). Or $\int_{-1}^{1}$ est une forme linéaire, ce qui fournit directement le résultat.

b) Supposons par l'absurde $q \geq 2n$. Alors on obtient une absurdité en appliquant la formule à $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - x_1)^2 ... (\mathrm{X} - x_n)^2$.

2. On montre dans un autre exercice les résultats donnés dans l'indication.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$.

$$\varphi_k : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\zeta_k) \end{array} \right. \qquad \mathrm{I} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{2n-1}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P} \end{array} \right.$$

Si $\mathrm{P} \in \ker \varphi_1 \cap ... \cap \ker \varphi_n$, il existe Q de degré $\leq n-1$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}(\mathrm{X} - \zeta_1)...(\mathrm{X} - \zeta_n)$. Alors

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P} = \langle \mathrm{Q} | \Pi_n \rangle = 0$$

Donc

$$\ker \varphi_1 \cap ... \cap \ker \varphi_n \subset \ker \mathrm{I}$$

Par conséquent $\mathrm{I} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ et il existe $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{I} = \mu_1 \varphi_1 + ... + \mu_n \varphi_n$. Finalement

$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}], \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}(x_i).}$$

3. Même type d'argument :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathrm{P}(\zeta_k) \end{array} \right. \qquad \Theta : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}^{(2n)} \end{array} \right.$$

$$\ker \theta = \mathbb{R}_{2n-1} \subset \ker \psi$$

donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \alpha \theta$.

4. Considérons

$$\mathrm{H} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n+1} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}, \mathrm{P}(\zeta_1), ..., \mathrm{P}(\zeta_n), \mathrm{P}'(\zeta_1), ..., \mathrm{P}'(\zeta_n) \right) \end{array} \right.$$

H est linéaire. Montrons qu'elle est injective. Soit $\mathrm{P} \in \ker \mathrm{H}$. On en déduit que $(\mathrm{X} - \zeta_1)^2 ... (\mathrm{X} - \zeta_n)^2$ divise P. Du degré de P on tire que $\mathrm{P} = c(\mathrm{X} - \zeta_1)^2 ... (\mathrm{X} - \zeta_n)^2$, et $\int \mathrm{P} = 0$ impose $c = 0$.
H est donc (dimensions) bijective, et en particulier surjective.
On dispose donc de $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$ tel que

(i) $\int_{-1}^{1} \mathrm{P} = \int_{-1}^{1} f$

(ii) $\forall k \in \{1, ..., n\}$ $\mathrm{P}(\zeta_k) = f(\zeta_k)$ et $\mathrm{P}'(\zeta_k) = f'(\zeta_k)$.

Finalement

$$\int_{-1}^{1} f - \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\zeta_i) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathrm{P}(\zeta_i) = \alpha \mathrm{P}^{(2n)}$$

Reste à prouver le

Lemme 39.6.1. *$(f - \mathrm{P})^{(2n)}$ s'annule.*

Preuve. $g = f - \mathrm{P}$ supposée non identiquement nulle. g s'annule en les ζ_i et g' également. De plus $\int_{-1}^{1} g = 0$. g' possède donc au moins $2n-1$ zéros d'après Rolle :

$$-1 < \zeta_1 < \chi_1 < \zeta_2 < ... < \chi_{n-1} < \zeta_n < 1$$

On suppose par l'absurde que $g^{(2n)}$ ne s'annule pas sur $[-1,1]$. Par conséquent g' a exactement $2n-1$ zéros, sinon on pourrait trouver un zéro à $g^{(2n)}$. g' n'a que des zéros simples, et change de signe en chacun de ses zéros. Donc g garde un signe constant sur $[-1,1]$. $\int_{-1}^{1} g = 0$ donne $g = 0$, absurde.

5. Calcul.

6. Idem.

$\square$

Troisième partie

Probabilités

Chapitre 40

Axiomatique de Kolmogorov

Exercice 40.1. Montrer que $\mathcal{T} = \{X \subset \mathbb{R},\ X \text{ ou } \mathbb{R}\backslash X \text{ fini ou dénombrable dénombrable }\}$ n'est pas stable par union infinie non dénombrable.

Solution. $\mathbb{R}_+ \notin \mathcal{T}$ et pourtant $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{x\in\mathbb{R}_+} \{x\}$. □

Exercice 40.2 (Lemmes de Borel-Cantelli)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'évènements. On pose

$$B = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p$$

1. Montrer que $B \in \mathcal{T}$.
2. On suppose que $\sum \mathbf{P}(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mathbf{P}(B) = 0$.
3. On suppose que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants et que $\sum \mathbf{P}(A_n) = +\infty$. Montrer que $\mathbf{P}(B) = 1$. Pourquoi la condition d'indépendance est-elle nécessaire ?

Solution. **1.** Union et intersection dénombrables d'événements.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $C_n = \bigcup_{p\geq n} A_p$. La suite (C_n) est décroissante pour l'inclusion, donc

$$0 \geq \mathbf{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(C_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} \mathbf{P}(A_p) \right) = 0$$

d'où $\boxed{\mathbf{P}(B) = 0.}$

3. En passant au complémentaire,

$$\overline{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} \overline{A_p}$$

et, la suite $(\overline{C_n})$ étant croissante pour l'inclusion, on écrit à bon droit

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\overline{C_n}) = \lim_{p\to+\infty} \prod_{q=n}^{p} (1 - \mathbf{P}(A_q))$$

par indépendance des (A_n). Supposons par l'absurde que $\mathbf{P}(\overline{\mathrm{B}}) \neq 0$. On déduit de la convergence du produit que $\lim \mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}_n}) = 1$. Par conséquent on peut utiliser les équivalents : $\sum \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$ a même nature que $\sum \ln(1-\mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$ qui tend donc vers $-\infty$, donc le produit *supra* tend vers 0, absurde. Donc $\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{B}) = 1.}$

L'indépendance des événements est essentielle : regarder ce qu'il se passe pour une suite constante à probabilité non nulle.

□

Exercice 40.3. Soit Ω un ensemble non vide, et $\mathrm{U}_1, ..., \mathrm{U}_p$ p parties disjoints de Ω dont la réunion donne Ω. Montrer que

$$\mathcal{T} = \{ \underset{i \in \mathrm{M}}{\cup} \mathrm{U}_i,\ \mathrm{M} \in \mathcal{P}([\![1, p]\!]) \}$$

est une tribu.

Exercice 40.4. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

1. Trouver les événements indépendants d'eux-mêmes.
2. On suppose $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$. Donner une c.n.s pour que A et B soient indépendants.

Exercice 40.5. On considère une urne dans laquelle sont disposées des boules numérotées de 1 à n. On réalise n tirages sans remise. Quelle est la probabilité que la boule 1 soit immédiatement suivie de la boule 2 dans le tirage ?

Solution. Modélisation :

$$\Omega = \{(u_1, ..., u_n) \in [\![1, n]\!]^n,\ \forall i \neq j,\ u_i \neq u_j\}.$$

La probabilité cherchée p est donnée par le calcul :

$$p = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(u_k = 1, u_{k+1} = 2) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \overbrace{(n-2)!}^{\text{placer 1 et 2}}}{n!} = \frac{1}{n}.$$

□

Exercice 40.6. 40 livres sont rangés sur une étagère, au hasard ? L'œuvre complète de X est constituée de 4 ouvrages, numérotés de 1 à 4. Quelle est la probabilité que les trois ouvrages soient rangés dans l'ordre ?

Exercice 40.7. Soit $\mathcal{T}$ une tribu infinie. Montrer que $\mathcal{T}$ a au moins la puissance du continu.

Exercice 40.8. Peut-on munir $\mathbb{N}^*$ d'une structure d'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ où $\mathcal{T}$ est une tribu contenant $a\mathbb{N}^*$ pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{P}$ vérifie

$$\forall a \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{P}(a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a} \quad ?$$

La réponse est non ; cf le corrigé du DS 2.

Chapitre 41

Variables aléatoires, suites de variables aléatoires

Variables aléatoires

Exercice 41.1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeur dans $\mathbb{R}$. Montrer que XY est une variable aléatoire discrète.

Solution. (X, Y) est une variable aléatoire, et si $f : (x, y) \mapsto xy$, alors $\mathrm{XY} = f((\mathrm{X}, \mathrm{Y}))$ est une variable aléatoire. □

Exercice 41.2. Soit X une variable aléatoire réelle possédant un moment d'ordre 2. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Var}(\mathrm{X}) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\, \mathbf{P}(\mathrm{X} \neq c) = 0$$

Solution. Un bon candidat pour c est vraisemblablement $\mathbf{E}(\mathrm{X})$. On prend donc cette valeur pour c et on peut écrire en utilisant le théorème de transfert :

$$0 = \mathbf{E}((\mathrm{X} - c)^2) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} (x - c)^2\, \mathbf{P}(\mathrm{X} = x) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega) \setminus \{c\}} (x - c)^2\, \mathbf{P}(\mathrm{X} = x). \tag{41.1}$$

Les termes de la dernière somme étant positifs ou nuls, ils sont tous nuls, ce qui fournit le résultat souhaité. □

Exercice 41.3. Calculer la variance d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Solution. On se donne $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p(1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n(n-1)+n)(1-p)^{n-1}p \\
&= p\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(1-p)^{n-1} + p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} \\
&= p(1-p)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)(1-p)^n + p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-p)^n \\
&= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + p\frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-p)^n = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

d'où

$$\operatorname{Var}\mathrm{X} = \mathbf{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbf{E}(\mathrm{X})^2 = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

□

Exercice 41.4. Calculer la variance d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Solution. On se donne $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathrm{X}^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n(n-1)+n)e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)\lambda^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^n}{n!}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right) \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{Var}(\mathrm{X}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbf{E}(\mathrm{X})^2 = \lambda}$$

□

Exercice 41.5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose $\Omega = [\![1, n]\!]$ et on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, $d|n$, on note D_d l'ensemble des multiples de d qui sont dans Ω.

1. Déterminer $\mathbf{P}(\mathrm{D}_d)$.
2. On écrit $n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Les évènements $\mathrm{D}_{p_1}, ..., \mathrm{D}_{p_r}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers dans $[\![1, n]\!]$ qui sont premiers avec n. Montrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Exercice 41.6. **1.** Soit X une variable aléatoire dénombrable à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X} \geq n)$$

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X} \geq n) \leq \mathbf{E}(\mathrm{X}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X} \geq n)$$

Exercice 41.7. Soient $p \in]0, 1[$ et $n \geq 3$ un entier. On considère un polygone à n côtés dont on allume chacun des côtés avec une probabilité p. Calculer le nombre moyen de composantes connexes allumées. On note Γ l'ensemble des côtés allumés.

Solution. Introduire la variable aléatoire $\mathrm{X} = \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbf{1}(v \text{ est une composante connexe de } \Gamma)$ où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des composantes connexes du polygone, puis utiliser la linéarité de l'espérance et dénombrer. □

Exercice 41.8. Soient $\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre p_i. Quelle est la loi de $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n)$?

Exercice 41.9. Soient $\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètre p_i. Quelle est la loi de $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + ... + \mathrm{X}_n$?

Suites de variables aléatoires

Exercice 41.10. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \geq 1}$...

Inégalités de concentration

Exercice 41.11 (Tchebychev)**.** Soit X une variable aléatoire dénombrable de variance finie, et soient $\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires iid suivant la loi de X. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mathrm{X}_1 + ... + \mathrm{X}_n}{n} - \mathbf{E}(\mathrm{X})\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\mathrm{X})}{n\varepsilon^2}. \tag{41.2}$$

Exercice 41.12. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables de Rademacher mutuellement indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = X_1 + ... + X_n.$$

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbf{E}\left(e^{tS_n}\right)$ et montrer que

$$\mathbf{E}\left(e^{tS_n}\right) \leq \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$$

2. Montrer que si $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(S_n \geq n\lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2 n}{2}\right)$$

Exercice 41.13 (Probabilité de positivité pour une variable aléatoire d'espérance positive). **1.**

2. *Application :* soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer

$$\mathbf{P}(X \geq 1) \leq \mathbf{E}(X) \qquad \mathbf{P}(X = 0) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

Soit Y une variable aléatoire presque sûrement non nulle, de variance finie et d'espérance positive. Montrer

$$\mathbf{P}(Y > 0) \geq \frac{\mathbf{E}(Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}$$

Solution. **1.** L'inégalité presque sûre

$$Y \leq \mathbf{1}_{Y>0} Y$$

fournit

$$0 \leq \mathbf{E}(Y) \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y>0} Y)$$

or par Cauchy-Schwarz,

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y>0} Y)^2 \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y>0})\,\mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{P}(Y > 0)\,\mathbf{E}(Y^2)$$

ce qui finalement en réarrangeant donne bien

$$\boxed{\mathbf{P}(Y > 0) \geq \frac{\mathbf{E}(Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}.}$$

2. La première inégalité est un cas particulier de celle de Markov, la seconde est obtenue en passant au complémentaire et en appliquant ce qui précède.

□

Exercice 41.14 (Inégalité de Cantelli)**.** Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer, en utilisant le résultat de l'exercice 41.13 :

$$\mathbf{P}(X > \mathbf{E}(X) - \varepsilon) \geq \frac{\varepsilon^2}{\mathrm{Var}(X) + \varepsilon^2}.$$

2. En déduire une majoration de $\mathbf{P}(X \leq \mathbf{E}(X) - \varepsilon)$ puis une majoration de $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon)$.

Solution. **1.** Appliquer le résultat évoqué à la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X}) + \varepsilon$.

2. Passage au complémentaire pour la première majoration. Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X})| \geq \varepsilon) &= \mathbf{P}(\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X}) \geq \varepsilon) + \mathbf{P}(\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X}) \leq -\varepsilon)\\ &= \mathbf{P}(-\mathrm{X} \leq \mathbf{E}(-\mathrm{X}) - \varepsilon) + \mathbf{P}(\mathrm{X} \leq \mathbf{E}(\mathrm{X}) - \varepsilon)\\ &\leq \frac{2\,\mathrm{Var}(\mathrm{X})}{\mathrm{Var}(\mathrm{X}) + \varepsilon^2}\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{Var}(\mathrm{X}) = \mathrm{Var}(-\mathrm{X})$.

$$\boxed{\mathbf{P}(|\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X})| \geq \varepsilon) \leq \frac{2\,\mathrm{Var}(\mathrm{X})}{\mathrm{Var}(\mathrm{X}) + \varepsilon^2}}$$

□

Exercice 41.15 (Inégalité de Paley-Zygmund)**.** Soient X une variable aléatoire positive possédant un moment d'ordre 2 et $\lambda \in]0, 1[$. Montrer

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} \geq \lambda\,\mathbf{E}(\mathrm{X})) \geq \frac{(1-\lambda)^2\,\mathbf{E}(\mathrm{X})^2}{\mathbf{E}(\mathrm{X}^2)}.$$

On pourra utiliser $\mathrm{X}' = \mathrm{X}\mathbf{1}_{\mathrm{X} \geq \lambda\,\mathbf{E}(\mathrm{X})}$.

Solution. Comme X est positive, $\mathbf{E}(\mathrm{X}) \geq 0$. De là,

$$\mathrm{X}' = \mathrm{X}\mathbf{1}_{\mathrm{X} \geq \lambda\,\mathbf{E}(\mathrm{X})} = \mathrm{X}\mathbf{1}_{\mathrm{X} - \lambda\,\mathbf{E}(\mathrm{X}) \geq 0} \geq \mathrm{X} - \lambda\,\mathbf{E}(\mathrm{X})$$

ce qui fournit en passant à l'espérance

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}') \geq (1-\lambda)\,\mathbf{E}(\mathrm{X})$$

or par Cauchy-Schwarz

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}') \leq \mathbf{E}(\mathrm{X}^2)\,\mathbf{P}(\mathrm{X} \geq \lambda\,\mathbf{E})$$

donc finalement en réarrangeant

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathrm{X} \geq \lambda\,\mathbf{E}(\mathrm{X})) \geq \frac{(1-\lambda)^2\,\mathbf{E}(\mathrm{X})^2}{\mathbf{E}(\mathrm{X}^2)}.}$$

□

Exercice 41.16 (Inégalité d'Hoeffding)**.** Soit X une variable aléatoire réelle vérifiant presque sûrement

$$a \leq \mathrm{X} \leq b$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi(t) = \ln(\mathbf{E}(e^{t\mathrm{Y}})).$$

1. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(t)$. Reconnaître en $\varphi''(t)$ une variance et la majorer sachant que $a \leq \mathrm{X} \leq b$.
2. En déduire
$$\mathbf{E}(e^{t\mathrm{Y}}) \leq \exp\left(\frac{(b-a)^2 t^2}{8}\right)$$
3. Montrer que le $\frac{1}{8}$ est optimal. *Variables de Rademacher.*
4. *Application : inégalité de Bernstein.* Soit $(\mathrm{X}_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles vérifiant presque sûrement
$$a_k \leq \mathrm{X}_k \leq b_k.$$
On pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_n$. Montrer que
$$\mathbf{E}\left(e^{t(\mathrm{S}_n - \mathbf{E}(\mathrm{S}_n))}\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{8}\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2\right)$$
et en déduire une majoration pour $\mathbf{P}(\mathrm{S}_n - \mathbf{E}(\mathrm{S}_n) \geq \varepsilon)$.

Exercice 41.17 (Variables sous-gaussiennes)**.** Étant donnés $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire réelle, on dit que X est α-sous-gaussienne si

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}\left(e^{t\mathrm{X}}\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que
$$x \longmapsto \exp(tx)$$
est convexe.
2. Soit X une variable réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est α sous-gaussienne. *On pourra montrer l'inégalité de convexité*
$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2}e^t + \frac{1-x}{2}e^{-t}$$
3. X une variable α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que
$$\mathbf{P}(|\mathrm{X}| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$$

Chapitre 42

Fonctions génératrices

Exercice 42.1. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}} = \mathrm{G}_{\mathrm{X}}\mathrm{G}_{\mathrm{Y}}.$$

Solution. On peut faire un calcul brut mais trivial. Voici une autre preuve, encore plus rapide. Pour $t \in [0, 1[$, par indépendance de X et Y,

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}(t) = \mathbf{E}\left(t^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\right) = \mathbf{E}\left(t^{\mathrm{X}}t^{\mathrm{Y}}\right) = \mathbf{E}\left(t^{\mathrm{X}}\right)\mathbf{E}\left(t^{\mathrm{Y}}\right) = \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t)\mathrm{G}_{\mathrm{Y}}(t).$$

□

Exercice 42.2. Donner la fonction génératrice d'une variable

1. binomiale,
2. géométrique,
3. de Poisson.

Solution. **1.**

$$\boxed{\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) = (1 - p + pt)^n}$$

2.

$$\boxed{\mathrm{G}_{\mathrm{Y}}(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t}}$$

3.

$$\boxed{\mathrm{G}_{\mathrm{Z}}(t) = e^{\lambda(t-1)}}$$

□

Exercice 42.3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et m dans $\mathbb{N}$. Montrer que G_{X} est de classe $\mathcal{C}^m$ sur $[0, 1]$ si et seulement si $\mathbf{E}(\mathrm{X}^m) < +\infty$.
Dans le cas contraire, quelle est la limite de $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}^{(m)}(t)$ lorsque t tend vers 1 ?

Exercice 42.4. On se donne $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_i et on pose :

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Montrer que la fonction génératrice de S_N est $G_N \circ G_X$.

Solution. Montrons d'abords que S_N est une variable aléatoire. On a bien $S_N : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour k dans $\mathbb{N}$,

$$(S_N = k) = \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} (S_N = k \text{ et } N = j \right) = \bigcup_{j=0}^{\infty} ((N = j)\, (S_N = k))$$

donc $(S_N = k)$ est un événement. S_N est bien une variable aléatoire.

Soit $t \in [0, 1]$. Dans $[0, +\infty]$,

$$\begin{aligned} G_{S_N}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_N = n) t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = j)\, \mathbf{P}(S_j = n) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(U = j)\, \mathbf{P}(S_j = n) t^n \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} G_{S_N}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = j) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_j = n) t^n}_{G_{S_j}(t)} \\ &= \mathbf{P}(N = 0) \underbrace{G_{S_0}(t)}_{=1} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = j) G_{X_1 + \ldots + X_j}(t) \\ &= \mathbf{P}(N = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = j) \underbrace{G_{X_1}(t) \ldots G_{X_j}(t)}_{(G_X(t))^j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = j) (G_X(t))^j \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{G_{S_N} = G_N \circ G_X}$$

□