

CC2 Mat309, 28 novembre 2022, 13h30-14h30,  
Amphi D2

Feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents et calculatrices interdits. Les réponses doivent être justifiées.

**Exercice 1.** ( $\sim 9$  points)

1. Donner la liste de tous les éléments du groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ .
2. Calculer les inverses dans  $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$  de tous les éléments de  $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ .
3. Calculer  $12! + 1 \pmod{13}$ .
4. Calculer  $2^{37} \pmod{13}$  par la méthode de votre choix en indiquant la méthode utilisée.
5. Calculer  $\sum_{i=1}^{52} i \pmod{53}$ .
6. Calculer  $\sum_{i=0}^{51} x^i \pmod{53}$  pour  $x = 1$  et  $x = 52$ .
7. Calculer  $\sum_{i=0}^{51} x^i \pmod{53}$  pour  $x = 2$ .

**Exercice 2.** ( $\sim 7$  points)

1. Déterminer si  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  est un corps ou non pour  $N = 2, N = 9, N = 13, N = 42$ . Donner un diviseur de 0 dans  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  dans les cas où ce n'est pas un corps. (Rappel : 0 n'est pas un diviseur de 0.)
2. Donner la table de multiplication du groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ .
3. Donner l'ordre de tous les éléments du groupe  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ .
4. Le groupe  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$  est-il cyclique? (Justifier.)

**Exercice 3.** ( $\sim 5$  points)

1. Sachant que 1381 est un nombre premier, donner la valeur de  $2^{1380} \pmod{1381}$ .
2. Sachant que  $2^{1362} \equiv 361 \pmod{1363}$ , que peut-on dire de l'entier 1363 avec certitude?
3. Sachant que  $2^{1386} \equiv 1 \pmod{1387}$ , que peut-on dire de l'entier 1387 avec certitude?
4. Donner un énoncé correct du test de Fermat.