

CC2 Mat309, 28 novembre 2022, 13h30-14h30,
Amphi D2

Feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée. Autres documents et calculatrices interdits. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. (~ 9 points)

1. Donner la liste de tous les éléments du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.
2. Calculer les inverses dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ de tous les éléments de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.
3. Calculer $12! + 1 \pmod{13}$.
4. Calculer $2^{37} \pmod{13}$ par la méthode de votre choix en indiquant la méthode utilisée.
5. Calculer $\sum_{i=1}^{52} i \pmod{53}$.
6. Calculer $\sum_{i=0}^{51} x^i \pmod{53}$ pour $x = 1$ et $x = 52$.
7. Calculer $\sum_{i=0}^{51} x^i \pmod{53}$ pour $x = 2$.

Exercice 2. (~ 7 points)

1. Déterminer si $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est un corps ou non pour $N = 2, N = 9, N = 13, N = 42$. Donner un diviseur de 0 dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans les cas où ce n'est pas un corps. (Rappel : 0 n'est pas un diviseur de 0.)
2. Donner la table de multiplication du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$.
3. Donner l'ordre de tous les éléments du groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$.
4. Le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique? (Justifier.)

Exercice 3. (~ 5 points)

1. Sachant que 1381 est un nombre premier, donner la valeur de $2^{1380} \pmod{1381}$.
2. Sachant que $2^{1362} \equiv 361 \pmod{1363}$, que peut-on dire de l'entier 1363 avec certitude?
3. Sachant que $2^{1386} \equiv 1 \pmod{1387}$, que peut-on dire de l'entier 1387 avec certitude?
4. Donner un énoncé correct du test de Fermat.